TEORIA DE EXPONENTES I

ALGEBRA

INDICADOR:
IDENTIFICA Y RESUELVE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS, APLICANDO LAS LEYES DE EXPONENTES CORRECTAMENTE.

FINALIDAD: La teoría de exponentes tiene por objeto estudiar todas las clases de exponentes que existen y las relaciones que se dan entre ellos. La operación que permite la presencia del exponente es la potenciación, la cual se define así:

POTENCIACION
Es la operación que consiste en repetir un número llamado base tantas veces como factor, como lo indica otro llamado exponente; al resultado de esta operación se le denomina potencia. Se representa así:

Exponente

Base → Potencia

$$b^n = P$$

Ejemplo :

- $2^6 = 2.2.2.2.2.2 = 64$
- $5^5 = 5.5.5.5.5 = 3\ 125$
- $4^6 = 4.4.4.4.4.4 = 4\ 096$

En general:

$$a^n = \underbrace{a.a.a \ldots. a}_{\text{“n” factores a}}$$

LEYES QUE RIGEN A LOS EXPONENTES

1. **MULTIPLICACIÓN DE BASES IGUALES:** Para esto se escribe la misma base y como exponente se escribe la suma de los exponentes.

$$\boxed{a^m . a^n = a^{m+n}}$$

Ejemplos :

- $x^6 . x^5 = x^{6+5} = x^{11}$
- $x^4.x^3.x^{-2}.x^{-4}.x^{15} = x^{4+3-2-4+15} = x^{16}$
- $2^{m+3}.2^{m+4}.2^{4-2m} = 2^{m+3+m+m+4+4-2m} = 2^{11} = 2048$

2. DIVISION DE BASES IGUALES

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}} \quad ; \qquad a \neq 0$$

Ejemplo :

- $\dfrac{x^{10}}{x^8} = x^{10-8} = x^2$
- $\dfrac{x^5}{x^{-18}} = x^{(5-(-18))} = x^{5+18} = x^{23}$
- $\dfrac{2^{a+3}}{2^{a-3}} = 2^{(a+3)-(a-3)} = 2^{a+3-a+3} = 2^6 = 64$

3. EXPONENTE CERO: Toda cantidad diferente de cero, con exponente cero, es igual a la unidad.

$$\boxed{\mathbf{a^0 = 1 \ ; \ a \neq 0}}$$

Ejemplos :

- $4^{5^0} = 4^1 = 4$
- $3^{2^{5^0}} = 3^{2^1} = 3^2 = 9$
- $3^{4^0} + 5^{8^0} + 7^{9^0} = 3 + 5 + 7 = 15$

4. EXPONENTE NEGATIVO: Toda cantidad diferente de cero elevada a un exponente negativo es igual a una fracción cuyo numerados es 1 y cuyo denominado es igual a la misma expresión pero con exponente hecho positivo.

$$\boxed{\mathbf{a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ ; \ a \neq 0}}$$

Ejemplos :

- $2^{-1} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$
- $\dfrac{a^2}{b^4} = a^2 b^{-4}$
- $\dfrac{a^{-3}}{b^{-5}} = \dfrac{b^5}{a^3}$

ALGEBRA

5. **POTENCIA DE UN PRODUCTO:** Para efectuar se eleva cada factor a dicha potencia.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Ejemplos :

- $\left(\sqrt{5}a\right)^2 = \sqrt{5}^2 a^2 = 5a^2$
- $a^5 \cdot b^5 = (a \cdot b)^5$
- $\frac{3^x . 2^x}{6^x} = \frac{(3.2)^x}{6^x} = \frac{6^x}{6^x} = 1$

6. **POTENCIA DE UN COCIENTE:** Para efectuar se eleva tanto el numerado como el denominador a dicha potencia.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} ; b \neq 0$$

Ejemplos :

- $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
- $\frac{x^9}{y^9} = \left(\frac{x}{y}\right)^9$
- $\frac{16^n}{8^n} = \left(\frac{16}{8}\right)^n = 2^n$

7. **POTENCIA NEGATIVA DE UN COCIENTE:** Para efectuar se invierte el cociente y la potencia se transforma en positiva y se procede como en el caso anterior.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} ; a,b \neq 0$$

Ejemplos :

- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$
- $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{1}\right)^3 = \frac{4^3}{1^3} = 4^3 = 64$

8. **POTENCIA DE POTENCIA:** Para realizar esta operación se escribe la misma base y se eleva a un exponente igual al producto de los exponentes.

$$\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{m.n}}$$

Ejemplo:

- $\left(x^{-3}\right)^5 = x^{-15}$
- $\left(x^{-6}\right)^{-5} = x^{30}$
- $\left[\left(x^2\right)^3\right]^4 = x^{2.3.4} = x^{24}$

OBSERVACION

Si a es un número real y m, n, p son enteros entonces:

$$a^{m^{n^p}} = a^{m^{n^p}}$$

Ejemplos

- $3^{2^{1^9}} = 3^{2^1} = 3^2 = 9$
- $4^{3^{2^{0^7}}} = 4^{3^{2^0}} = 4^{3^1} = 4^3 = 64$

EJEMPLOS

1. Simplificar:

$$A = \frac{2^{x+4} + 2\left(2^x\right)}{3\left(2^{x+3}\right)}$$

RESOLUCIÓN

$$A = \frac{2^x.2^4 + 2.2^x}{3.2^x.2^3} = \frac{2^x.(2^4+2)}{2^x.3.8}$$

$$A = \frac{16+2}{24} = \frac{18}{24}$$

$$A = \frac{3}{4}$$

***2.Simplificar:* B = (3**

2.Simplificar: $B = (3^{x-1} + 3^{x-2}).\ 3^{2-x}$

RESOLUCIÓN

$$B = \left(3^x.\frac{1}{3} + 3x.\frac{1}{9}\right).3^2.\frac{1}{3^x}$$

$$B = \cancel{3^x}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right).\frac{9}{\cancel{3^x}} = \frac{4}{9}.\cancel{9} = 4$$

3. Simplificar:

$$C = 64^{-8^{-27^{-\frac{1}{3}}}}$$

RESOLUCIÓN

$$C = 64^{-8^{-27^{-1/3}}} = 64^{-8^{-\left(3^3\right)^{-1/3}}} = 64^{-8^{-3^{-1}}} =$$

$$64^{-8^{-1/3}} = 64^{-\left(2^3\right)^{-1/3}} = 64^{-2^{-1}}$$

$$C = 64^{-1/2} = \left(8^2\right)^{-1/2} = 8^{-1} = \frac{1}{8}$$

4. ***Simplificar:***

$$D = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]^{-1/2}$$

RESOLUCIÓN

$$D = \left[2^4 + 3^2\right]^{-1/2} = \left[16+9\right]^{-1/2}$$

$$D = 25^{-\frac{1}{2}} = \left(5^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 5^{-1} = 1/5$$

CONSTRUYENDO NUSTROS CONOCIMIENTOS

1. Reducir:

$$A = \frac{15^3.81^3}{9.27^4}$$

Resolución:

Rpta. 25

2. Efectuar:

$$B = \underbrace{3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,....\, 3}_{56 \text{ factores}} - (-3)^{54} \,.\, 9$$

Resolución:

Rpta. 0

3. Efectuar:

$$C = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{7}\right)^{-2} + (-3)^2$$

Resolución:

Rpta. 50

4. Reducir:

$$D = \frac{m^{22} + m^{20}n + 1}{m^{24} + m^{22}n + m^2}$$

Resolución :

Rpta. a^{-2}

5. Simplificar:

$$E = \frac{\overbrace{m.m.m...m}^{25\,veces}.\overbrace{n^2.n^2.n^2...n^2}^{12\,veces}}{\underbrace{(mn)(mn)(mn)....(mn)}_{24\,veces}}$$

Resolución :

Rpta. m

6. Calcular:

$$F = \frac{2^{a+1} + 2^{a+2} + 2^{a+3} + 2^{a+4}}{2^{a-1} + 2^{a-2} + 2^{a-3} + 2^{a-4}}$$

Resolución:

Rpta. 32

7. Simplificar:

$$G = \left[\left(m^{-3}\right)^2 \left(m^3\right)^{-2} .m^{(-3)^2}\right]^{-3^{-2^0}} ;\forall m \neq 0$$

Resolución :

Rpta. m

ALGEBRA

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Señalar si es verdadero o falso:

   I. Siempre se cumple que: $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ( )

   II. $(m + n)^x = m^x + n^x$ ( )

   III. $5^a + 5^2 + 5^b = 5^{a+2+b}$ ( )

2. Simplificar:

$$A = \left[\frac{(80)^m + (16)^m}{(20)^m + (4)^m}\right]^{(2m)^{-1}}$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

3. Calcular:

$$B = [21 \times 3^o - 5 \times 2^2 - 4 \times 2^{-1} + 5^o]^o$$

a) 0 b) 1 c) 5
d) indeterminado e) N.A.

4. Calcular:

$$C = \frac{3^{m^2+4} - 2.3^{m^2+3} + 4.3^{m^2+1}}{5.3^{m^2+1} - 2.3^{m^2}}$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) N.A.

5. Simplificar:

$$D = \left(x.y^{-y} + yx^{-x}\right)\left[x^{-(x+1)} + y^{-(y+1)}\right]^{-1}$$

a) x b) y c) xy
d) x^{-1} e) N.A.

6. Efectuar:

$$E = 32^{25^{-16^{-2^{-2}}}}$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) N.A.

7. Efectuar:

$$F = 81^{-16^{-8^{-\frac{1}{3}}}}$$

a) 3 b) 1/2 c) 1/3
d) 2 e) N.A.

8. Calcular "m" en: $9^{-32^{-25^{-m^{-1}}}} = \mathbf{3^{-1}}$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

9. Efectuar:

$$G = \frac{2^{m+2} + 2^{m+1} + 2^{m}}{2^{m}}$$

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

10. Simplificar:

$$H = \frac{5^{m+3} - 5^{m+1}}{5.5^{m-1}}$$

a) 120 b) 125 c) 115
d) 100 e) N.A.