



SEPARATAS DE PRODUCTOS NOTABLES II

OTRAS IDENTIDADES**I. Identidad trinómica de Argand.**

$$(a^2+a+1)(a^2-a+1)\equiv a^4+a^2+1$$

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)\equiv a^4+a^2b^2+b^4$$

II. Identidad de Gauss.

$$a^3+b^3+c^3-3abc\equiv(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

III. Identidad Especial

$$(a+b)(a+c)(b+c)+abc\equiv(a+b+c)(ab+ac+bc)$$

IV. Identidad de LAGRANDE

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\equiv(ax+by)^2+(ay-bx)^2$$

V. Igualdades condicionales.

Si: $a+b+c=0$, entonces se cumple:

$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+bc)$$

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

$$(ab+ac+bc)^2=(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2$$

VI. Teoremas.

Sean: $\{x,y,z\} \subset \mathbb{R}$; $\{m,n,p\} \subset \mathbb{Z}^+$

Luego:

$$1. \quad x^{2m}+y^{2n}+z^{2p}=0 \Leftrightarrow x=y=z=0$$

$$2. \quad x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz \Leftrightarrow x=y=z$$

Ejemplos:

1. Si: $a^2+b^2+c^2=3(ab+ac+bc)$

Hallar:

$$M = \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{(a+b+c)(ab+ac+bc)}$$

Resolución

En la identidad de Gauss

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\underbrace{(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)}_{3(ab+ac+bc)}$$

Entonces:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=2(a+b+c)(ab+ac+bc)$$

$$\therefore M = \frac{2(a+b+c)(ab+ac+bc)}{\cancel{(a+b+c)}\cancel{(ab+ac+bc)}} \\ M=2$$

2. Simplificar:

$$R = \frac{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}{9(x-y)(y-z)(z-x)}$$

Resolución

Haciendo:

$$x-y=a \quad ; \quad y-z=b \quad ; \quad z-x=c$$

Se observa que: $a+b+c=0$

$$\text{Luego tendremos: } \frac{a^3+b^3+c^3}{9abc}$$

Por la igualdad condicional:

$$\text{si: } a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

de donde:

$$R = \frac{a^3+b^3+c^3}{9abc} = \frac{3abc}{9abc}$$

$$\therefore R = \frac{1}{3}$$

3. Si se cumple que: $a^3+b^3+c^3=0$

Simplificar:

$$M = \frac{3abc}{a(b-a)+b(c-b)+c(a-c)}; abc \neq 0$$

Resolución

$$M = \frac{3abc}{ab - a^2 + bc - b^2 + ca - c^2}$$

$$M = \frac{3abc}{-(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)}$$

$$M = \frac{-3abc}{(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)}$$

Como $a^3 + b^3 + c^3 = 0$, podemos colocarlo así:

$$M = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)}$$

Por la identidad de Gauss:

$$M = \frac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)}{(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)}$$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Si: $x + y + z = 0$ y $x^3 + y^3 + z^3 = 99$

Calcular el valor de : xyz

Resolución :

Rpta. 33

2. Si: $a^3 + b^3 + c^3 = 0$ y $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 12$; $a, b, c \neq 0$

Calcular $M = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab}$

Resolución :

Rpta. $-\frac{1}{2}$

3. Si $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ y

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 = xy + xz + yz$$

Calcular: $\frac{x^3 y^3 z^3}{(x+y)(x+z)(y+z)}$

Resolución:

Rpta. 3

4. Si: $a^3 + b^3 + c^3 = 86$; $ab + ac + bc = 3$ y $abc = 2$. Calcular: " $a+b+c$ "

Resolución:

Rpta. 5

5. Si: $x + y + z = 0$; $xyz = 5$
Hallar el valor de:
 $E = xy(x+y)^4 + yz(y+z)^4 + xz(x+z)^4$

Resolución :

Rpta. 75

6. Si se cumple: $x^2 - 3x + 1 = 0$

Calcular: $R = \frac{x^7 - x^5 + x^3}{x^5}$

Resolución :

Rpta. 6

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Si $a+b+c = 0$ y $ac = -5$

Hallar: $A = c^2 + bc$

- a) 10 b) 0 c) -10
d) 5 e) -5

2. Si: $x+y+z = 0$

Hallar: $B = \frac{y^2 + z^2 + 2yz}{x^2}$

- a) 0 b) 1 c) x
d) -1 e) $1/x$

3. Si: $x + y + z = 0$

Hallar: $(y+z)^2 - x^2$

- a) 0 b) 1 c) x
d) -1 e) $1/x$

4. Si $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ y además $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 \neq 0$

Hallar el valor de:

$$M = \frac{(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3}{(a+b+c)^3 + 7abc}$$

- a) $1/2$ b) 2 c) 6
d) $3/7$ e) $-3/7$

5. Si $abc = 0$ y $a+b+c=1$

Hallar: $K = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$

- a) 0 b) 2^{-1} c) 3^{-1}
d) 1 e) $1/6$

6. Sabiendo que: $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$

Además:

$a^2 + b^2 + c^2 + 14 = 2(a+2b+3c)$, indicar el valor de: $\frac{(a+b+c)abc}{a^3 + b^3 + c^3}$

- a) 0 b) 3 c) 1
d) 4 e) $2/3$

7. Si: $(x+1)^2 = (\sqrt{3}+2)x$

Calcular: $R = \frac{(x^2+1)^2}{x^4+1}$

- a) 2 b) -2 c) 3
d) -3 e) 4

8. Si: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$

Calcular:

$$M = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 27abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

- a) 0 b) -1 c) -3
d) 3 e) 1

9. Calcula: $M = \sqrt{5x^3 + 3x + 6}$

Si: $x = \sqrt[3]{1 + \frac{3\sqrt{14}}{3\sqrt{5}}} + \sqrt[3]{1 - \frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}}$

- a) 0 b) 2 c) 4
d) 6 e) N.A.

10. Si se cumple: $a + \sqrt{ac} = b + \sqrt{bc}$

Calcular:

$$E = \frac{a}{\sqrt{bc}} + \frac{b}{\sqrt{ac}} + \frac{c}{\sqrt{ab}}$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) N.A.