ARITMETICA

# SEPARATAS NÚMEROS RACIONALES Q

**Objetivos**

- Construir el conjunto de los números racionales a partir de la relación de equivalencia.
- Identificar e interpretar las fracciones.
- Obtener los números avales e interpretarlos.
- Efectuar cambios de base con los números avales.
- Reconocer a las fracciones continuas y clasificarlas.
- Expresar un número racional e irracional como una fracción continua simple.

**Introducción**

Gregorius XIII no era matemático, fue Papa de Roma, sin embargo, su nombre está ligado con un problema matemático muy importante, el del calendario.
La naturaleza nos dio dos unidades naturales de tiempo: el año y el periodo de veinticuatro horas (el día y la noche). Según un antiguo manual de cosmografía *lamentablemente el año no contiene un número entero de días*. A pesar de ello origina un problema matemático interesante.
1 año = 365 días, 5 horas, 49 minutos, 46 segundos = 365,242199 días
En la vida civil es imposible legalizar tal duración del año. ¿Y que seria si aceptamos el año civil igual precisamente a 365 días? En la figura, esta representada la órbita de la Tierra. El 1 de enero del 2000 a las 0 horas la Tierra se encontraba en el punto *A.* En el transcurso de 365 días no podrá alcanzar el punto *A*, por lo cual a las 0 horas del primero de enero del 2001 resultaría en el punto *B* y el 1 de enero del 2002 en el punto *C*, etc. Entonces, ocurre que si fijamos la posición de la Tierra en la órbita correspondiente a una fecha dada, esta será en todos los años diferente: se atrasará casi en 6 horas. Durante 4 años este atraso constituirá casi un día y la fecha fijada caerá en diferentes estaciones del año, es decir, El 1 de enero del invierno se desplazara gradualmente para el otoño, luego para el verano. Esto genera incomodidad porque no se podrá relacionar algunas medidas periódicas (siembra, comienzo del año escolar) con unas fechas de calendario bien definidas.

No obstante, existe salida a esta situación. Hace falta considerar que unos años tienen 365 días, otros 366 días, alternándolos de tal manera que la duración media del año sea la más próxima posible a la auténtica. Así podemos reproducir la duración auténtica del año con cualquier precisión, pero para ello se necesitará una ley muy compleja de alternación de los años cortos (ordinarios) y largos (bisiestos) lo que es indeseable. Se requiere un compromiso: una ley comparativamente sencilla de alteración de los años cortos y largos que puede brindar una duración media del año suficientemente próxima a la auténtica.

**<u>Los Números Racionales (Q)</u>**

Comúnmente podemos observar que las operaciones de adición, sustracción y multiplicación están bien definidas en el conjunto de los Z, tal es así que por ejemplo, dados los numero 5 y 7 $\in$ Z, se puede observar lo siguiente:

| | |
|---|---|
| • $5 + 7 = 12 \in Z$ | • $7+5=12\in Z$ |
| • $5 - 7 = -2 \in Z$ | • $7-5=2\in Z$ |
| • $5 \times 7 = 35 \in Z$ | • $7x5=35\in Z$ |

ARITMETICA

El resultado de cada operación resulta otro número entero.

Es decir, cumplen con la ley de clausura. Observemos el caso de la división, por ejemplo, para los números 8 y 4 $\in$ Z

$$\frac{8}{4} = 2 \in Z, \text{ pero } \frac{4}{8} = 0{,}5 \notin Z$$

Ya que el cociente de dos enteros no necesariamente es entero (no se cumple la ley de clausura), es necesario extender el conjunto de los enteros al conjunto de los racionales, para el cual se define Z x Z* como

$$\boxed{Z \times Z^* = \{ (a\,;b) / a \in Z \wedge b \in Z^* \}}$$

Se puede ver que el conjunto producto de los conjuntos Z y Z*, los cuales se definen como:

$$Z = \{...;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$$
$$Z^* = \{...;-4;-3;-2;-1;1;2;3;...\} = Z - \{0\}$$

Los pares ordenados de Z x Z* se van a denotar como

$$(a\,;b) = \frac{a}{b}$$

***Por ejemplo***

- $(2;\,3) = \dfrac{2}{3}$
- $(-2;5) = \dfrac{-2}{5}$
- $(6;\,2) = \dfrac{6}{2} = 3$
- $(4;2) = \dfrac{4}{2} = 2$
- $(1;\,-3) = \dfrac{1}{-3}$
- $(2;-5) = \dfrac{2}{-5}$

De ahí tenemos que

- $(1;2) = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$
- $(2;4) = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$
- $(3;6) = \dfrac{3}{6} = 0{,}5$

Tomar el mismo valor y podemos decir que

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = .... = \frac{n}{2n} = 0{,}5$$

Son iguales en valor y además de

- $\frac{1}{2}=\frac{2}{4} \rightarrow 1x4=2x2$
- $\frac{3}{6}=\frac{4}{8} \rightarrow 3x8=6x4$

Se podría establecer la siguiente relación

$$(a; b) \approx (c; d) \leftrightarrow a \times d = b \times c$$

**Ahora** veamos si $\approx$ es una relación de equivalencia. Para ello, debe ser:

**Reflexiva:** $\frac{a}{b} \approx \frac{a}{b}$

**Simétrica:** $\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d} \rightarrow \frac{c}{d} \approx \frac{a}{b}$

**Transitiva:** $\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} \approx \frac{e}{f} \rightarrow \frac{a}{b} \approx \frac{e}{f}$

***Demostración:***

**1.- Reflexiva**

Sabemos que $a \times b = b \times a$ ( Ley conmutativa)

Luego $\frac{a}{b} \approx \frac{a}{b}$

**2.- Simétrica**

De $a \times d = b \times c$

Se puede escribir $c \times b = d \times a$

Lo cual asegura $\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d} \rightarrow \frac{c}{d} \approx \frac{a}{b}$

**3.- Transitiva**

Como

$\frac{a}{b} \approx \frac{c}{d} \rightarrow axd = bxc$ (I)

$\frac{c}{d} \approx \frac{e}{f} \rightarrow cxf = dxe$ (II)

Multiplicando (I) y (II)

(axd)(cxf)=(bxc)(dxe)

axf=bxe

$\frac{a}{b} \approx \frac{e}{f}$

Se dice entonces que la relación "$\approx$" es de equivalencia, y debido a ello esta relación nos particiona o clasifica el conjunto Z x Z* en clases de equivalencia. Así tendremos

- $\left[\frac{3}{6}\right] = \left\{\ldots;\frac{-3}{-6};\frac{-2}{-4};\frac{-1}{-2};\frac{1}{2};\frac{2}{4};\frac{3}{6};\ldots.\right\}$

Cualquiera de los elementos de este conjunto puede ser representante de la clase, es decir, se le podría nombrar como clase de equivalencia $\frac{3}{6}$.

De los infinitos representantes de clase existe uno de ellos al que llamaremos representante canónico.

Si $\frac{a}{b}$ es representante canónico de una clase de equivalencia, entonces */a/ y b* PESI; *b* $\in Z^+$

En el ejemplo el representante canónico será $\frac{1}{2}$.

- $\left[\frac{4}{10}\right] = \left\{\ldots.;\frac{-6}{-15};\frac{-4}{-10};\frac{-2}{-5};\frac{2}{5};\frac{4}{10};\frac{6}{15};\ldots..\right\}$

Clase de equivalencia $\frac{4}{10}$

Representante canónico $\frac{2}{5}$

- $\left[\frac{2}{1}\right] = \left\{\ldots;\frac{-6}{-3};\frac{-4}{-2};\frac{-2}{-1};\frac{2}{1};\frac{4}{2};\frac{6}{3};\ldots.\right\}$

Clase de equivalencia $\frac{2}{1}$

Representante canónico $\frac{2}{1}$

- $\left[\frac{2}{-10}\right] = \left\{\ldots;\frac{-3}{15};\frac{2}{-10};\frac{1}{-5};\frac{-1}{5};\frac{-2}{10};\ldots\right\}$

Clase de equivalencia $\frac{2}{-10}$

Representante canónico $\frac{-1}{5}$

- $\left[\frac{0}{n}\right] = \left\{\ldots;\frac{0}{-3};\frac{0}{-2};\frac{0}{-1};\frac{0}{1};\frac{0}{2};\frac{0}{3};\ldots\right\}$

## Clase de equivalencia 0

$\frac{0}{k}$ es el representante canónico por lo que 0 y k deben ser PESI , como k $\in Z^{+}$ , entonces 0 y k deben tener como único divisor común a la unidad . Sabemos que

$0=\overset{0}{k}\,K\forall K\in Z^{+}$

$K=\overset{0}{K}$

Entonces k es divisor de 0 y k

K = 1 por lo que su representante canónico es $\frac{0}{1}$

## REFORZANDO MIS CONOCIMIENTOS

1. Halle una fracción equivalente a $\frac{21}{36}$, tal que su numerador sea excedido por su denominador en 50.

   A) 7/12  B)30/80  C)210/300  D) 70/120  E) 14/24

   ***Resolución:***

2. Ruth y Edwin salen a la avenida con 120 soles y sufren tres robos sucesivos, perdiendo $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ del dinero que iba quedando ¿Con cuanto se quedaron al final?

   A) s/. 20  B) s/.40  C) s/.30  D) s/: 15  E) s/. 25

   ***Resolución***

3. En una reunión se sabe que 2/3 eran varones. De las mujeres 2/3 eran casadas y 6 solteras. ¿Cuánto representa la tercera parte del total de hombres?
   A) 10  B) 24  C) 12
   D) 6  E) 18
   Resolución

4. Se reparten "n" soles entre las personas A, B y C de manera que A reciba la mitad de B y C reciba la cuarta parte de todo el dinero. ¿cuanto recibe A?
   A) n/4  B) n/2  C) n/8  D) 3n/8  E) N.A.

   ***Resolución:***

5. Efectuar : $E=\frac{3131}{1313}+\frac{1212}{2626}+\frac{4545}{3939}$

   A) 1  B) 2  C) 3  D) 4  E) 5

   ***Resolución***

ARITMETICA

6. La mitad de una fracción "m" es igual a 1/5 y la tercera parte de otra "n" es igual también a 1/5; entonces m+n=?
A) 2/5 B) 3/5 C) ½ D) 1 E) 2
***Resolución***:

## REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1. ¿Qué número racional no puede corresponder a "n" si : 1/8 <n < ½

A) 3/8 B)1/4 C) 5/16 D) 3/5 E) 1/3

2. El número total de octavos en dos enteros y tres cuartos es :
A) 1 B) 14 C) 19 D) 22 E) 24

3. Hallar: $A = \dfrac{\frac{2}{5}+\frac{1}{24}+\frac{1}{8}-\frac{13}{120}}{\frac{6}{13}+1\frac{1}{5}+\frac{2}{65}}$

a) $3\frac{9}{48}$ b) $\frac{13}{48}$ c) $3\frac{9}{13}$
d) $\frac{1}{2}$ e) 1

4. De ¼ restar un 1/5, restar 1/3 de ¾, sumar estas diferencias y dividirlo entre la diferencia de 2/7 y 1/5. Hallar la séptima parte del cociente anterior.

A) 3/2 B) 9/7 C) 7/9 D) 2/3 E) 3/5

5. ¿Cuántas veces esta contenido lo que le falta a ¾ para ser igual a 1 en lo que le falta 3/2 para ser igual a 5?

A) 13 B) 52 C) 14 D) 78 E) 39

6. ¿Cuánto le falta a 1/5 de 4/5 para ser igual a ¼ de 4/5?

A) 3/20 B) 2/25 C) 1/20 D) 1/25 E) 1/15

7. Hallar: $A^B$; sabiendo que :

$$A = 8\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - \left(\frac{8}{9}\right)^{-1}$$

$$B = \left(\frac{3}{\sqrt[3]{9}}\right)^{-3}$$

A) 1 B) 2 C) 8 D) 9 E) 16

8. ¿Cuál es la fracción equivalente a 70/98, tal que el producto de sus términos sea315?
Dar la diferencia de sus términos.

A) 18 B) 10 C) 12 D) 6 E) 8

9. Encontrar la fracción entre 2/13 y 41/52 cuya distancia en la recta numérica a la primera sea el doble de la distancia a la segunda.
A) 13/26 B) 14/26 C)15/26 D) 17/26 E) 21/26

10. Efectuar el producto:

$$P=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)......\left(1-\frac{1}{100}\right)$$

A) ½ B) 11/20 C)111/201 D) 99/101 E) 1/99