



SEPARATAS DE FACTORIZACIÓN III

I. **Método del Aspa simple.** - Es empleado cuando la expresión es de la forma:

$$P(x) = Ax^{2n} + Bx^n + C$$

$$P(x) = Ax^{2m} + Bx^m y^n + Cy^{2n}$$

$$m, n \in \mathbb{Z}^+$$

O cualquier otra expresión transformable a una de las formas anteriores.

Para factorizar a éste tipo de polinomios deberá tenerse en cuenta las siguientes reglas:

1. Descomponemos el primer y tercer término, a los cuales vamos a llamar términos fijos, en sus factores primos.
2. Efectuamos el producto de los factores primos en aspa tratando de verificar el segundo término.
3. Cuando el tercer término tiene signo (+), sus factores tendrán signos iguales, dados por el signo del segundo término.
4. Cuando el tercer término tiene signo (-) sus factores tendrán signos diferentes, colocando el signo del segundo término al producto mayor que se obtiene al efectuar en aspa.
5. Los factores se toman sumados en forma horizontal.

Ejemplos:

- Factorizar: $P(x) = x^2 + 10x + 21$

Resolución:

$$\begin{array}{rcl}
 x^2 & + & 10x + 21 \\
 \begin{array}{l} x \\ x \end{array} & \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} +3 \\ +7 \end{array} \\
 & & \begin{array}{l} = 3x \\ = 7x \end{array} \\
 & & \hline
 & & 10x
 \end{array} \quad (+)$$

$$\therefore P(x) = (x+3)(x+7)$$

- Factorizar: $F(x) = 3x^2 - 4x - 15$

Resolución:

$$\begin{array}{rcl}
 3x^2 & - & 4x - 15 \\
 \begin{array}{l} 3x \\ x \end{array} & \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} +5 \\ -3 \end{array} \\
 & & \begin{array}{l} = 5x \\ = -9x \end{array} \\
 & & \hline
 & & -4x
 \end{array} \quad (+)$$

$$\therefore F(x) = (3x+5)(x-3)$$

- II. **Método del aspa doble.**- Se utiliza para factorizar polinomios de dos variables de seis términos que tienen la forma general:

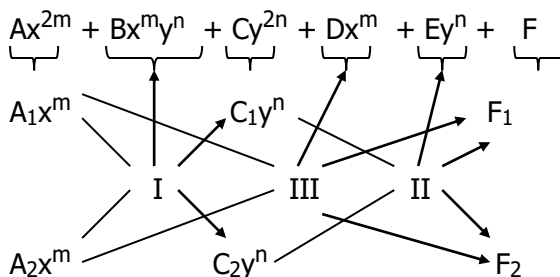
$$P(x,y) = \underbrace{Ax^{2m}}_{1^\circ} + \underbrace{Bx^m y^n}_{2^\circ} + \underbrace{Cy^{2n}}_{3^\circ} + \underbrace{Dx^m}_{4^\circ} + \underbrace{Ey^n}_{5^\circ} + \underbrace{F}_{6^\circ}$$

$\{m; n\} \subset \mathbb{N}$

O cualquier otra expresión transformable a ésta, para emplear éste método se procede de la siguiente manera:

1. Se adecua el polinomio a la forma general, en caso falte uno o más términos éstos se completarán con ceros.
2. Se forma el primer trinomio de la expresión (1°, 2° y 3°) y se le aplica un aspa simple (I) para comprobar el término en $x^m y^n$.
3. Luego a los términos en y^{2n} , y^n , y al término independiente (3°, 5° y 6°) se les aplica un aspa simple (II) para comprobar el término en y^n .
4. Finalmente se aplica un aspa simple (III) de extremo a extremo para comprobar al término en x^m .
5. Los factores serán las sumas horizontales.

Procedimiento:



Debe ocurrir que:

- I. $A_1 x^m \cdot C_2 y^n + A_2 x^m \cdot C_1 y^n = Bx^m y^n$
- II. $C_1 y^n \cdot F_2 + C_2 y^n \cdot F_1 = Ey^n$
- III. $A_1 x^m \cdot F_2 + A_2 x^m \cdot F_1 = Dx^m$

Luego los factores se toman en forma horizontal:

$$P_{(x,y)} = (A_1x^m + C_1y^n + F_1)(A_2x^m + C_2y^n + F_2)$$

Ejemplos:

- Factorizar: $P_{(x,y)} = 3x^2 + 10xy + 8y^2 + 14x + 22y + 15$

Resolución:

$$3x^2 + 10xy + 8y^2 + 14x + 22y + 15$$

Diagrama de aspa simple:

- Términos: $3x$, $4y$, 5 , x , $2y$, 3
- Productos parciales:
 - I: $3x \cdot 2y = 6xy$
 - II: $4y \cdot 3 = 12y$
 - III: $x \cdot 4y = 4xy$

Verificando:

I. $3x \cdot 2y + x \cdot 4y = 10xy$

II. $4y \cdot 3 + 2y \cdot 5 = 22y$

III. $3x \cdot 3 + x \cdot 5 = 14x$

$\therefore P_{(x,y)} = (3x + 4y + 5)(x + 2y + 3)$

- Factorizar:

$$P_{(x,y)} = 6x^2 - 5xy + y^2 + 17x - 6y + 5$$

Resolución:

$$6x^2 - 5xy + y^2 + 17x - 6y + 5$$

Diagrama de aspa simple:

- Términos: $3x$, y , 1 , $2x$, $-y$, 5
- Productos parciales:
 - I: $3x \cdot y = 3xy$
 - II: $y \cdot 1 = y$
 - III: $2x \cdot (-y) = -2xy$

$\therefore P_{(x,y)} = (3x - y + 1)(2x - y + 5)$

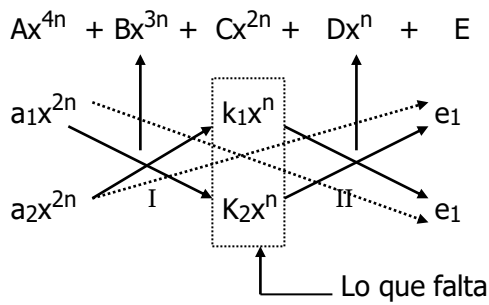
III. **Aspa doble especial.** - Permite factorizar expresiones que adoptan la siguiente forma general:

$$P(x) = Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx + E \quad ; n \in \mathbb{N}$$

O cualquier otra expresión transformable a ésta.

PROCEDIMIENTO PARA FACTORIZAR:

- Se ordena de acuerdo a la forma general, colocando cero en el lugar del término que falta.
- Se descompone adecuadamente los extremos buscando mediante un aspa simple, aproximadamente al término central.



Se debe tener (SDT): Cx^{2n}

Se tiene (ST) : $(a_1e_2 + a_2e_1)x^{2n}$

Falta: $(c - a_1e_2 - a_2e_1)x^{2n} = kx^{2n}$

3. Lo que falta se descompone en la parte central buscando aspas simples a ambos lados.

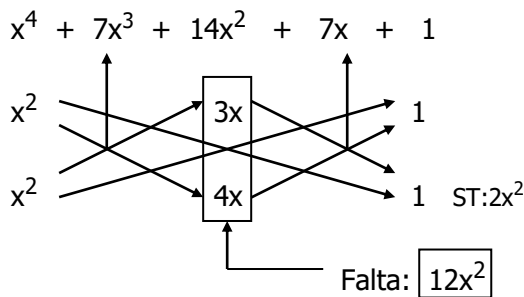
4. Los factores se toman en forma horizontal.

$$(a_1x^{2n} + k_1x^n + e_1)(a_2x^{2n} + k_2x^n + e_2)$$

Ejemplos:

- Factorizar: $P(x) = x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 7x + 1$

Resolución:

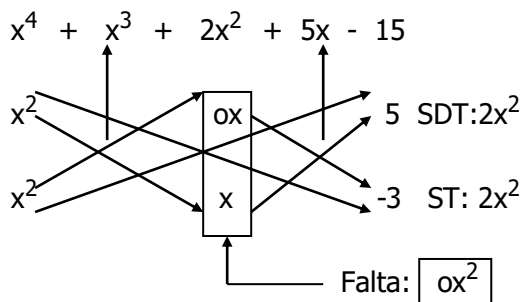


$$\therefore P(x) = (x^2 + 3x + 1)(x^2 + 4x + 1)$$

- Factorizar: $F(x) = x^3(x+1) + 2x^2 + 5(x-3)$

Resolución:

Efectuando y ordenando de acuerdo a la forma general:



$$\therefore F(x) = (x^2 + 5)(x^2 + x - 3)$$

CONSTRUYENDO**MIS CONOCIMIENTOS**

1. Factorizar:

$$a^4 - 16a^2 + 64$$

Resolución :

Rpta.: $(a^2 - 8)(a^2 - 8)$

2. Factorizar:

$$x^{2n} + 2x^n - 15$$

Resolución :

Rpta. $(x^n + 5)(x^n - 3)$

3. Factorizar:

$$6x^2 + 3xy - 3y^2 + 19x + 13y + 10$$

Resolución :

Rpta. $(2x-y+5)(3x+3y+2)$

4. Factorizar:

$$8x^2 + 4xy + 18x + 6y + 9$$

Resolución :

Rpta. $(4x+2y+3)(2x+3)$

5. Factorizar:

$$x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x + 6$$

Resolución:

Rpta. $(x^2+x+3)(x^2+x+2)$

6. Factorizar:

$$2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 5x + 1$$

Resolución:

Rpta. $(2x^2+2x+1)(x^2+3x+1)$

REFORZANDO**MIS CAPACIDADES**

1. Indique un factor de:

$$8m^2 - 2m - 3$$

- a) $4m+3$ b) $2m+3$ c) $2m-3$
 d) $4m-3$ e) $2m-1$

2. El número de factores primos de:

$$P_{(x,y)} = 4x^4y - 4x^3y^2 - 24x^2y^3 ; \text{ es:}$$

- a) 5 b) 6 c) 2
 d) 3 e) 4

3. Factorizar:
 $x(x+a+c) + ac$
 a) $(x+a)(x+c)$ b) $(x+a)(x-c)$
 c) $(x-a)(x-c)$ d) $(x-a)(x+c)$
 e) $xa(x+c)$
4. $K(x) = 2(x-2)^4 - 5(x-2)^2 + 3$
 Factorizado es equivalente a:
 a) $(2x^2 - 8x + 5)(x+1)(x+3)$
 b) $(2x^2 - 8x + 5)(x-1)(x-3)$
 c) $(2x - 7)(x-3)$
 d) $(2x^2 - 4x + 5)(x-1)(x-3)$
 e) $(2x^2 - 4x + 1)(x-1)(x-3)$
5. Señale un factor de:
 $P(x) = 6x^2 + 19xy + 15y^2 - 11x - 17y + 4$
 a) $3x-5y-4$ b) $3x+5y+4$
 c) $2x-3y+1$ d) $2x+3y+1$
 e) $2x+3y-1$
6. Marque el divisor binomio del Polinomio:
 $15x^2 - 22xy + 8y^2 + 24x - 16y$
 a) $5x - 2y$ b) $3x+2y$
 c) $3x - 2y$ d) $2x + 3y$
 e) $2x - 3y$
7. La suma de los dos factores primos del polinomio:
 $x^2 + y^2 - 4z^2 + 2xy + 3yz + 3xz$
 viene dado por:
 a) $2(x+y)+3z$ d) $2(x+y)$
 b) $2(x+y+z)$ e) $5z$
 c) $2(x+y)+z$
8. ¿En cuánto se diferencian los factores primos del polinomio:
 $x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10$?
 a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5
9. Un factor del polinomio:
 $2x^4 + 3x^2 + x + 3$; es:
 a) $x^2 + x + 1$ d) $x^2 - x - 1$
 b) $x^2 - x + 1$ e) $2x^2 + 2x + 3$
 c) $x^2 + x - 1$
10. Halle la suma de los factores primos de:
 $x^4 + 5x^2 + 9$
 a) $2(x^2+1)$ d) $2(x^2+3)$
 b) $2(x^2 - 3)$ e) $2x^2$
 c) $2(x^2+2)$