SEPARATAS COCIENTES NOTABLES II

ALGEBRA

En General: Los cocientes notables
Son aquellos que se pueden obtener de forma directa. Resultan de divisiones exactas de la forma: $\dfrac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$

Caso I: $\dfrac{x^n - a^n}{x - a}$**, para n entero positivo**

> **<u>Cuidado</u>**
> El cociente de la forma: $\dfrac{x^n + a^n}{x - a}$ no es cociente notable, porque el resto de dividir ($x^n + a^n$) entre (x - a) es $2a^n$

Apliquemos el teorema del resto igualando el divisor a cero: x – a = 0, entonces x = $\boxed{}$
Hallemos el residuo, reemplazando el valor de x en el dividendo.
Resto: P(a) = $\boxed{}$ - $\boxed{}$ = 0 para cualquier otro entero positivo.
Por lo tanto: $\dfrac{x^n - a^n}{x - a}$ es un cociente notable para cualquier n entero positivo.
Hallemos el cociente con el método de Ruffini:

	1	0	0	0....	...	0	0	$-a^n$
a		$\boxed{}$	a^2	a^3		$\boxed{}$	a^{n-1}	a^n
	1	a	$\boxed{}$	$\boxed{}$		a^{n+2}	a^{n-1}	$\boxed{}$

Luego tenemos que:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a}\ x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}, \text{ para n entero positivo}$$

Donde:

- El exponente n indica el número de términos del cociente.
- Todos los términos tienen coeficiente positivo.
- Los exponente del primer término (x) disminuyen y los exponentes del segundo término (a) aumentan.

Ejemplos:

1. $\dfrac{m^3 - 3^6}{m - 3} = m^5 + m^4(3) + m^3(3)^2 + m^2(3)^3 + m(3)^4 + (3)^5$
   $= m^5 + 3m^4 + 9m^3 + 27m^2 + 81m + 243$

2. $\dfrac{y^3 - 32}{x^3 - 5} = \dfrac{(y)^5 - (2)^5}{x^3 - 5} = (y)^4 + (y)^3(2) + (y)^2(2)^2 + (y)(2)^3 + (2)^4$
   $= y^4 + 2y^3 + 4y^2 + 8y + 16$

3. $\dfrac{y^{12}-625}{x^3-5} = \dfrac{(x^3)^4-(5)^4}{x^3-5}$ = $(x^3)^3 + (x^3)^2(5) + (x^3)(5)^2 + (5)^3$

$= x^9 + 5x^6 + 25x^3 + 125$

4. $\dfrac{64x^6-729}{2x-3} = \dfrac{(2x)^6-(3)^6}{2x-3}$ = $(2x)^5+(2x^4)(3)+(2x)^3\,(3)^2 + (2x)^2(3)^3 + (2x)(3)^4 + (3)^5$

$= 32x^5 + 48x^4 + 72x^3 + 108x^2 + 162x + 243$

Caso II: $\dfrac{x^n-a^n}{x+a}$, para n entero positivo par

Apliquemos el teorema del resto: P(-a) $= (-a)^n - a^n = 0$; sólo si n es entero positivo par.

Por lo tanto: $\dfrac{x^n-a^n}{x+a}$ es un cociente notable para n par.

Hallemos el cociente con el método de Ruffini:

	1	0	0	0....	...	0	0	$-a^n$
$-a$		$-a$		$-a^3$		a^{n-2}		a^n
	1		a^2				$-a^{n-1}$	

Cuidado

- El cociente de la forma: $\dfrac{x^7-a^7}{x+a}$ no es cociente notable, porque el resto de dividir $(x^7 - a^7)$ entre (x - a) es $-2a^7$.
- El cociente $\dfrac{x^4+a^4}{x+a}$ no es cociente notable porque el resto de dividir $(x^4 + a^4)$ entre (x+a) es $2a^4$

Luego tenemos que:

$\dfrac{x^n-a^n}{x+a}$ $x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots + a^{n-2}x - a^{n-1}$, para n entero positivo par

Donde el desarrollo del cociente tiene n términos cuyos coeficientes son positivos y negativos alternadamente

Un reto:

¿Cuánto es m + n si el desarrollo de $\dfrac{x^m-y^n}{x^5+y^7}$ tiene 8 términos?

Ejemplo:

$\dfrac{256-81a^4}{4+3a} = \dfrac{(4)^4-(3a)^4}{4+3a}$ = $(4)^3 - (4)^2\,(3a) + (4)(3a)^2 - (3a)^3$

$= 64 - 84a + 36a^2 - 27a^3$

Caso III: $\frac{x^n + a^n}{x + a}$**, para n entero positivo impar**

Apliquemos el teorema del resto: P(-a) = $(-a)^n + a^n = 0$; sólo si n es entero positivo impar.

Por lo tanto: $\frac{x^n + a^n}{x + a}$ es un cociente notable para n entero positivo impar.

Hallemos el cociente con el método de Ruffini:

	1	0	0	0....	...	0	0	$-a^n$
		$-a$	a^2				a^{n-1}	$-a^n$
	1		a^2	$-a^3$		$-a^{n-2}$		

Luego tenemos que:

$\frac{x^n + a^n}{x + a}$ $x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots - a^{n-2}x + a^{n-1}$, para n entero positivo impar

Donde el desarrollo del cociente tiene n términos cuyos coeficientes son positivos y negativos alternadamente

Ejemplo:

$$\frac{8a^{12} + 729}{2a^4 + 9} = \frac{(2a^4)^3 + (9)^3}{2a^4 + 9} = (2a^2)^2 - (2a^2)(9) + (9)^2$$

$$= 4a^4 - 18a^2 + 81$$

Anota:

En todo CN $\frac{x^a \pm a^b}{x^p \pm a^q}$ **se verifica que** $\frac{a}{p} = \frac{a}{p}$ **= n → números de términos del desarrollo.**

Ejemplos:

¿Qué expresiones son CN?

- $\frac{x^{30} - y^{18}}{x^5 + y^3}$ 30÷5 = 6
  18 - 3 = 3

Luego n = 6. La expresión es un CN caso **II** y su desarrollo tiene 6 términos.

- $\frac{(2x)^{24} + y^{24}}{(2x)8 + y^5}$ 24÷8= 3
  24 ÷ 6 = 4

Luego no existe n. La expresión no es un cociente notable.

Anota

- El término de lugar k en el desarrollo de un CN recibe el nombre de **término k-ésimo.**
- Un cociente de n términos con n impar, tiene **un término central** que ocupa el lugar $\frac{n+1}{2}$.
- Un CN de n términos con n par, tiene **dos términos centrales** que ocupan los lugares $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2}+1$

Término de lugar k de un cociente notable

Sea $\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + y^{n-1}$ tenemos:

Término 1: $t_1 = x^{n-1}y^0 = x^{n-1}y^{1-1}$

Término 2: $t_2 = x^{n-2}y^1 = x^{n-2}y^{2-1}$

Término 3: $t_3 = x^{n-3}y^2 = x^{n-3}y^3$

.

.

.

Término k: $t_k = x^{n-k}y^{k-1}$, para los CN cuyo divisor es el tipo x – y

Para CN cuyo divisor es del tipo x + y hasta anteponer un signo – en los términos que ocupan lugar par.

En general:

término k: $t_k = (-1)^{k+1}x^{n-k}y^{k-1}$

Ejemplos:

1. Halla t_6 en $\dfrac{x^{10}-2^{10}}{x+2}$

$t_6 = -x^{10-6} \cdot 2^{6-1}$

Luego $t_5 = x^{40-5}y^{5-1} = x^{35}y^5$

2. Halla t_5 en $\dfrac{a^{200}-b^{160}}{a^5-2}$

Si $x = a^5$ y b^4, entonces $\dfrac{x^{10}-2^{10}}{x+2}$

$= -x^4.2^5 = -32x^4$

$= (a^5)(b^4)^6$

$= a^{165}\,b^{24}$

CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTOS

1. Escribe el desarrollo de cada uno de los siguientes cocientes notables:

a) $\dfrac{x^8-a^8}{x-a}$

b) $\dfrac{x^{12}-3^{20}}{x+2}$

c) $\dfrac{x^{30}-y^{40}}{x^3+y^4}$

d) $\dfrac{x^5+1}{x+1}$

2. Simplifica las siguientes expresiones

a) $\dfrac{x^{10}+x^8+\ldots+x^2+1}{x^5+x^4+\ldots x+1}$ - (x^5-x^4-x^2 + x-1)

b) $\dfrac{x^{10}+x^8+\ldots x^2+1}{x^5+x^4+\ldots x+1}$ + (x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)

3. Calcula el resultado de 10^9-1 entre 999

4. ¿Cuántos términos tiene el desarrollo de $\dfrac{a^{4n}-b^{5n}}{a^4-b^5}$, sabiendo que el grado absoluto del quinto término es 32?

5. En el cociente notable $\dfrac{a^n-b^{875}}{a-b}$ determina:

   a) El número de términos de su desarrollo.
   b) El segundo término

6. Calcular el tercer término del desarrollo de $\dfrac{x^7-y^7}{x-y}$

7. Calcular el cuarto término del desarrollo de $\dfrac{81x^4-1}{3x-1}$

8. Efectuar:

   a) $\dfrac{x^5-32}{x-2}$

   b) $\dfrac{x^{15}+y^{15}}{x^3+y^3}$

   c) $\dfrac{64x^6-y^6}{2x+y}$

ALGEBRA

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Escribe el desarrollo de cada uno de los siguientes cocientes notables:

   a) $\dfrac{x^7+128}{x+2}$

   b) $\dfrac{x^9-512}{x-2}$

   c) $\dfrac{x^3-1}{x-1}$

   d) $\dfrac{x^6-64}{x+2}$

   e) $\dfrac{x^{12}-1}{x^2-1}$

   f) $\dfrac{x^{24}-1}{x^3+1}$

   g) $\dfrac{x^{28}-1}{x^4+1}$

2. Simplifica las siguientes expresiones:

   a) $\dfrac{x^{10}+x^8+...+x^2+1}{x^5+x^4+...+x+1}$ + ($x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$)

   b) $\dfrac{x^{10}+x^8+...+x^2+1}{x^5-x^4+...+x-1}$ + ($x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$)

3. Halla el tercer término del desarrollo de:

   $\dfrac{243a^5-32b^5}{3a-2b}$

4. Halla el número de términos en el desarrollo de:

   a) $\dfrac{x^{8n-1}+2^{4n+5}}{x^{2n-9}+2^{n-4}}$

   b) $\dfrac{x^p-y^{12}}{x^3-y^p}$

5. Calcular el segundo término del desarrollo de: $\dfrac{125x^3-27}{5x-3}$

6. Calcular el cuarto término del desarrollo de: $\dfrac{64x^6-1}{2x+1}$

7. Calcular el tercer término del desarrollo de:

   $\dfrac{x^{14}+128y^7}{x^2+2y}$

8. Efectuar:

a) $\dfrac{x^9-49}{x+y}$

b) $\dfrac{x^{21}+y^{21}}{x^3+y^3}$

c) $\dfrac{y^8-x^8}{y+x}$

d) $\dfrac{x^{30}+y^{30}}{x^{10}+y^{10}}$

e) $\dfrac{x^{10}-y^{10}}{x+y}$