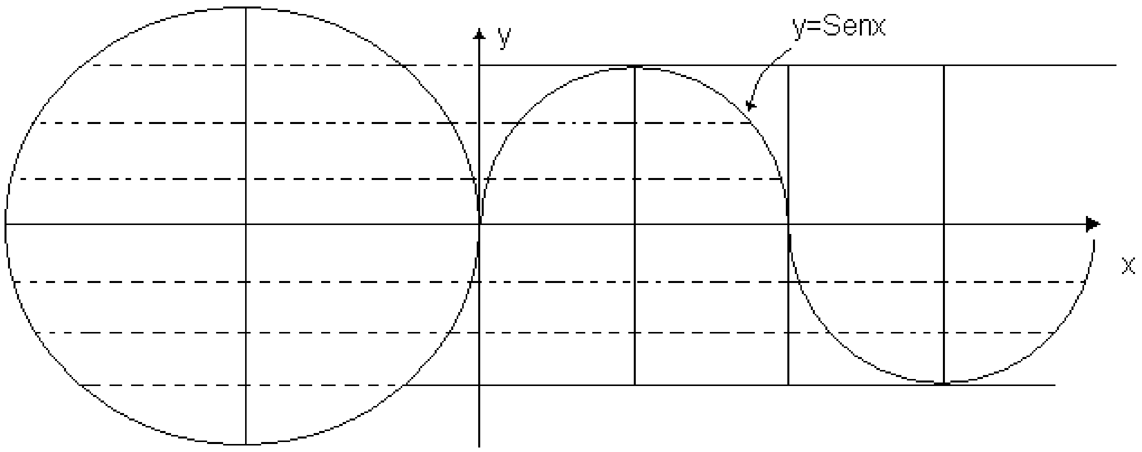
Ayuda para Docentes CUARTO SECUNDARIA

TRIGONOMETRIA

SEPARATAS DE CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA

Al finalizar el presente capitulo Ud. será capaz de:

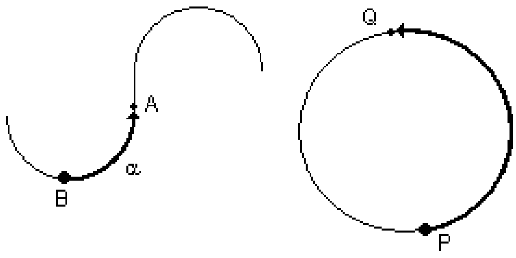
1. Conocer el concepto de Circunferencia Trigonométrica, así como sus elementos.
2. Identificar las líneas trigonométricas en cada cuadrante así como sus variaciones.
3. Resolver problemas.



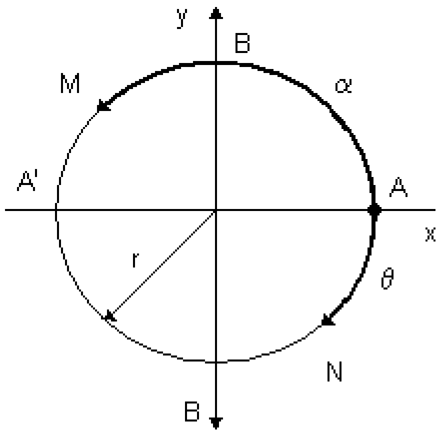
$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

CONCEPTOS PREVIOS

1. **ARCO ORIENTADO: E**s la trayectoria descrita por un punto al desplazarse sobre una curva, en un determinado sentido. Estos arcos tienen un origen y un extremo.
   Para "α" : B $\rightarrow$ Origen
   A $\rightarrow$ Extremo
   Para "β" : P $\rightarrow$ Origen
   Q $\rightarrow$ Extremo



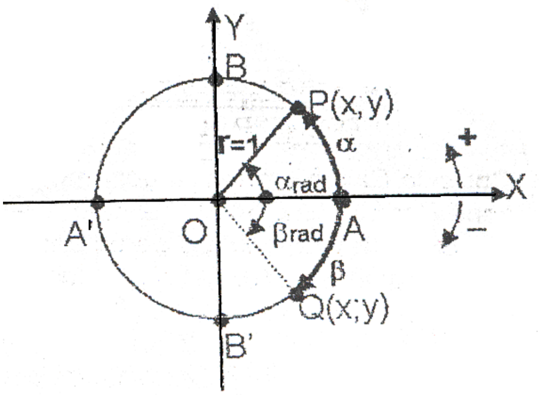
ARCO EN POSICION NORMAL: Son arcos orientados que se determinan en una circunferencia canónica; con origen en el punto "A" que es el punto de interseccion del eje X con la circunferencia, según se muestra en la figura; los cuales pueden tomarse en sentido antihorario (+) o en sentido horario (-), pc.



- "α" ∧ "θ" son arcos en posición normal.
- " α " : positivo
  " θ ": negativo
- "M" y "N" extremos de arco

OJO: *Estudiar a la circunferencia unitaria (r =1) es lo mismo que estudiar a la circunferencia Trigonométrica.*

CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA



ELEMENTOS

O (0,0)	: Origen
A (1,0)	: Origen de arcos
B (0,1)	: Origen de complementos de arcos
A' (-1,0)	: Origen de suplementos de arcos
B' (0-1)	: Sin nombre especial
P (x,y)	: Extremos de arco
Q (x,y)	
α	: (+) ∧ β : (-)

Siendo un punto de la circunferencia trigonométrica (C.T) cuyas coordenadas son (x;y) y el radio r= 1 se cumple que:

$$\boxed{X^2 + y^2 = 1}$$

$\Rightarrow$ Ecuación de la C.T.

Ejemplos: Determinar cual de los siguientes puntos pertenece a la C.T.

❶ $P\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ ❷ $M\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$

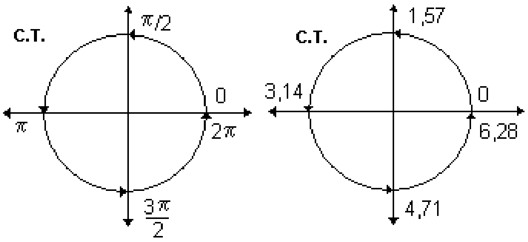
LOS NUMEROS REALES SOBRE LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA

En la matemática muchas veces realizamos aproximaciones, como:

$\pi = 3,14$; $2\pi = 6,28$

$\frac{\pi}{2} = 1,57$ $\qquad$ $3\pi/2 = 4,71$

A continuación presentamos un grafico en el que estos números aproximados sean ubicados sobre la circunferencia Trigonométrica.



Observamos que ambas graficas sean equivalentes:

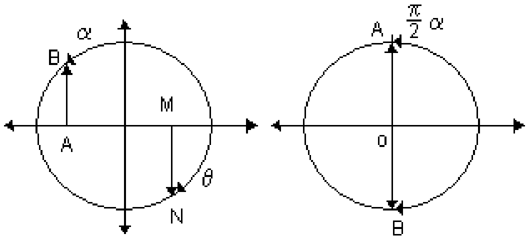
Por lo tanto tomando como referencia dichos gráficos: Ubicar aproximadamente ± 1 ; $\pm 3 \pm 5 \pm 7$

TOMA NOTA: usualmente en el lenguaje matemático no se escribe rad. Sino se sobre entiende, ejemplos:

$\angle$ AOB = 2 en lugar de X AOB= 2,00, Sen $\frac{\pi}{3}$ en lugar de Sen $\frac{\pi \text{rad}}{4}$

REPRESENTACION DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS (LINEAS) EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA.

SENO: Es la Ordenada del extremo del Arco.



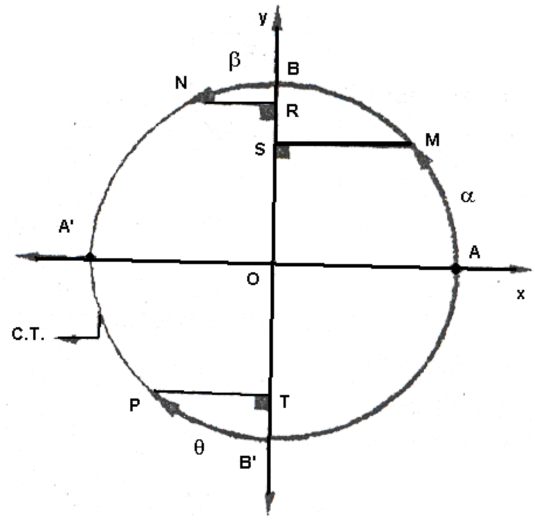
AB=Senα(+) OA=Sen $\frac{\pi}{2}$ (+)

MN=Senθ (-) OB=Sen(-β)(-)

$-1 \leq \alpha \, 1 \leq 1$ Sen(Max)=1

Sen(Min)=-1

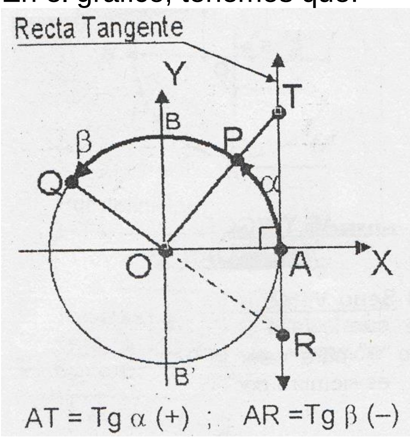
COSENO: Es la Abcisa del extremo del Arco.
En el grafico, tenemos entonces que:



MS=Cosα(+)
NR=Cosβ(-)
PT=Cosθ(-)

$$-1 \leq Cos\alpha \leq +1 \begin{cases} (Cos\alpha)_{\max} = 1 \\ (Cos\alpha)_{\min} = -1 \end{cases}$$

TANGENTE: Es la ordenada del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el origen de arcos y la prolongación de radio que pasa por el extremo del arco.
En el grafico, tenemos que:



Debe notarse que la L.T. Tangente puede ser trazada para cualquier arco "α" excepto para los extremos de arco B y B' ($\alpha \varepsilon \Re$ - $[2n+1]\pi/2$), ya que en esos puntos la recta tangente nunca se cortara con la prolongación de los radios debido a que son paralelas, cumpliéndose además:

$-\infty < Tg\alpha < +\infty \quad \begin{cases} (Tg\alpha)_{max} = +\infty \\ (Tg\alpha)_{min} = -\infty \end{cases}$

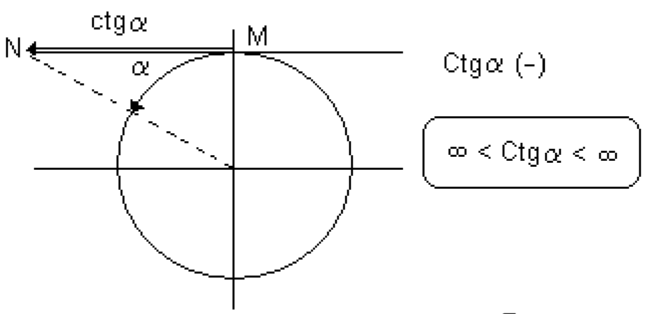
Ejemplo 1: Graficar Sen 2 ; Sen $\frac{4\pi}{3}$

Ejemplo 2: Con la ayuda de la C.T. Graficar: Cos 70º ; Cos 220º

Ejemplo 3: Graficar

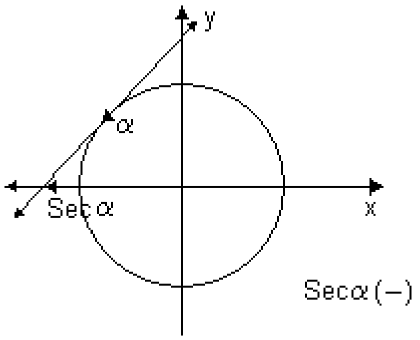
Tan 2 ; Tan $\frac{\pi}{4}$

COTANGENTE: Es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el origen de complementos y la prolongación del radio que pasa por el extremo del arco.



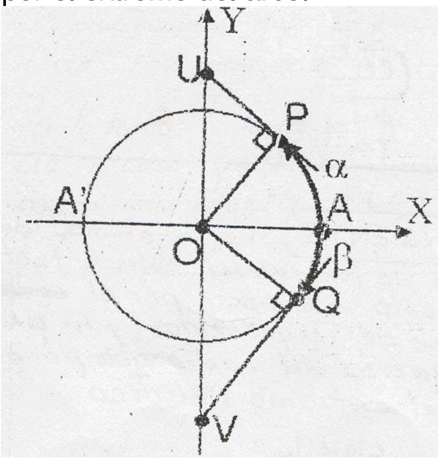
Ejemplo 4: Graficar Ctg 2 ; Ctg $\frac{-\pi}{4}$

<u>LINEA SECANTE:</u> Es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el extremo del arco y el eje “X”.
En el grafico, tenemos entonces que:



$+1 \leq Sec\alpha \leq -1$

COSECANTE: Es la ordenada del punto de intersección del eje y con la recta tangente trazada por el extremo del arco.



OU = Csc α (+); OV = Csc β (-), Debe notarse que la L.T. Cosecante puede ser trazada para cualquier arco "α" excepto para los extremos de arco A y A¡ ($\alpha \varepsilon \Re - n\pi$), ya que la Tangente geométrica que pase por estos puntos nunca se cortara con la abscisa o eje "Y", debido a que son paralelas, cumpliéndose además:

$-\infty < Csc\alpha \leq -1$
$+1 \leq Csc\alpha < \infty$

$$\begin{cases}(Csc\alpha)_{max} = +\infty \\ (Csc\alpha)_{min} = -\infty\end{cases}$$

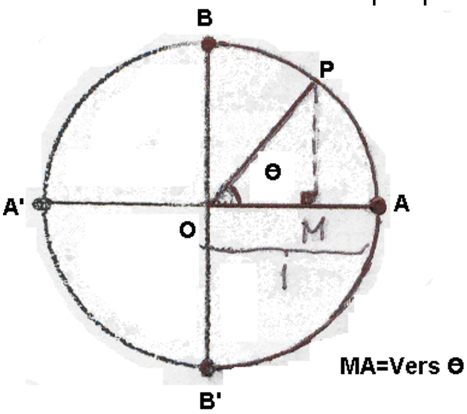
Es lo mismo que:

$Csc\alpha \leq -1 \quad \vee \quad Csc\alpha \geq 1$

Ejemplo 5: Graficar: Sec 2,5 $\wedge$ Csc 3

LINEAS TRIGONOMETRICAS AUXILIARES

1. Seno Verso o Verso (Vers): Es lo que le falta al Coseno de un arco "θ" para valer la unidad. El verso es siempre positivo.



Por definición:

$\boxed{\text{Vers } \theta = 1 - \text{Cos } \theta}$ $\quad \nu\ \theta \varepsilon R$

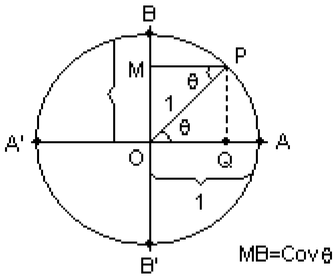
Teniendo en cuenta lo anterior, se llega a deducir la variación del Verso:

$\theta \leq \text{vers } \theta \leq 2$

Ejemplo 6: Calcular

Ver $\left[\dfrac{\pi}{3}\right]$

2. Coseno Verso o Coverso (Vov): Es lo que falta al Seno de un arco "θ" para valer la unidad. El Coverso es siempre positivo.



Por definición:

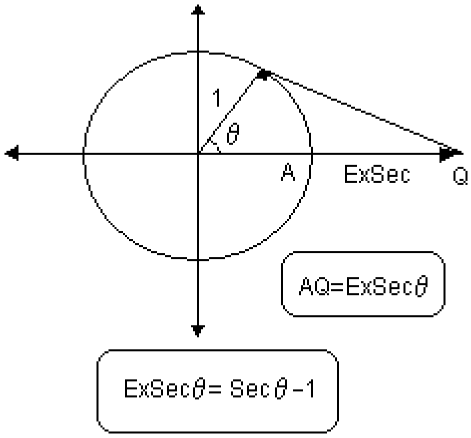
$\boxed{\text{Cov } \theta = 1 - \text{Sen } \theta}$ $\quad \forall\ \theta\ \varepsilon\ R$

Teniendo en cuenta lo anterior, se llega a deducir la variación del Coverso:

$O \leq \text{Cov } \theta \leq 2$

Ejemplo 7.

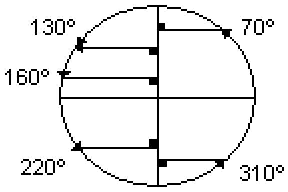
3. <u>Ex -Secante o External:</u> Es el execeso de la Secante respecto a la unidad.Si la Secante se mide hacia la derecha del origen de arcos entonces la Ex – Secante es positiva de lo contrario es negativo.



Ejemplos:

1. Con la ayuda de una C.T. señale la expresión de menos valor entre:
   a) Cos70º b) Cos130º c) Cos160º
   d) Cos220º e) Cos12º

   Resolución:
   Graficamos en la C.T los arcos mencionados y ubicamos en ella las líneas trigonométricas coseno y observamos que:



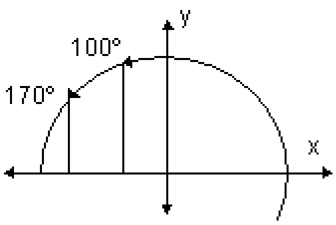
Cos70º y cos310º: son (7)
Cos130º, cos160º y cos220º son(-)

∴ entre los negativos notamos que el menor o más negativo es Cos160º.

2. Señale verdadero (v) o falso (f), según corresponda:
   I. Sen100º > Sen 170º
   II. Cos100º > Cos 140º
   III. Sen210º > cos 210º

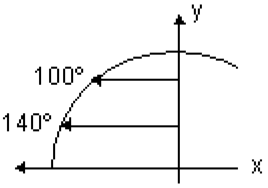
   Resolución:
   Cada caso lo representaremos en una C.T.

I)



Sen100º > Sen 170º

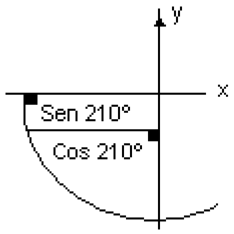
II)



Por ser más negativo cos140º

Cos 100º > Cos 140º

III)



Observamos que sen 210º y Cos 210º son negativos pero Cos210º es más negativo:

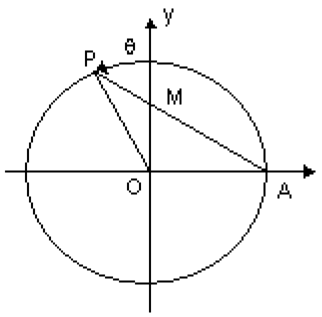
∴ Sen210º > Cos 210º

Después de analizar cada caso se tiene:

I) V II) V III) F

3. En la C.T. mostrada expresar en términos de θ.

a) La longitud del segmento OM



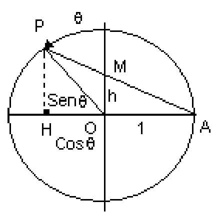
Resolución:

En el gráfico se puede reconocer:

◣ AOM ~ ◣ AHP

$$\frac{h}{|\text{sen}\theta|} = \frac{1}{1+|\cos\theta|}$$

$$h = \frac{|\text{sen}\theta|}{1+|\cos\theta|}$$



Donde:

$|\text{sen}\theta| = \text{sen}\theta \quad |\cos\theta| = -\cos\theta$

$\therefore\ h = \dfrac{\text{sen}\theta}{1-\cos\theta}$

CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTOS

1. Señale la expresión de mayor valor:

   Sen 10º; Sen100º y Sen 300º

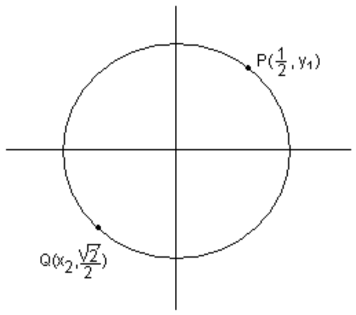
2. Señale la expresión de menor valor:

   a) Cos 70º
   b) Cos 130º
   c) Cos 160º
   d) Cos 220º
   e) Cos 310º
3. Indicar A + B siendo:
   A el máximo valor de:
   4Senx + 2Cos y

   B el mínimo valor de:
   2Cosθ + Senθ
4. Determinar verdadero (v) o falso (F) en:

   I. Sen 3 > Sen 1
   II. Cos 6 > Cos 5
   III. Tan 1 < Tan 3
5. Si $\dfrac{-3\pi}{2} < x_2 < x_1 < -\pi$
   Analizar la verdad o falsedad en:
   Sen x_1 < Sen x_2
   $\text{Sen}\left(\dfrac{x_1}{\pi}\right) < \text{Sen}\left(\dfrac{x_2}{\pi}\right)$
6. Si α=30º calcular:
   S=versα . covα + ExSecα

7. Calcular la ordenada y_1 la abscisa x_2 de los puntos P y Q en la C.T.



8. ¿Cuál es la variación de $M=3Sen\theta+1$; $\theta\in R$?
9. Si $\frac{\pi}{2} < \alpha < \theta < \pi$

   Señalar las proposiciones verdaderas:

   I. $Tan\alpha < Tan\theta$
   II. $Ctg\alpha < Ctg\theta$
   III. $Tan\alpha \cdot Tan\theta < 0$

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Indicar el signo de comparación que debe ir en el círculo, si $x \in$ IIC.

   Sen x ○ Tgx

   a) > b) < c) ≥

   d) ≤ e) =
2. Indicar el orden creciente de los siguientes valores: Sen 3; Cos3; Tg3.

   a) Sen 3; Cos3; Tg3
   b) Cos 3; Tg3; Sen3
   c) Cos 3; Sen 3; Tg3
   d) Tg 3; Cos 3; Sen3
   e) Tg 3; Sen 3; Cos3
3. Indicar el orden creciente de los siguientes valores: Sen1; Cos3; Tg5.

   Sen1; Cos3; Tg5
   Tg5; Cos3; Sen1
   Tg5; Sen1; Cos3
   Cos3; Tg5; Sen1
   Cos3; Sen1; Tg5
4. Cuando el ángulo x aumenta de 90º a 180º ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   a) El seno aumenta
   b) El coseno aumenta
   c) La cosecante aumenta
   d) La secante disminuye

5. Indicar el máximo valor de:
   $A=Cosx + Cosy - Cosz$
   a) 1 b) 2 c) -1
   d) 4 e) 0
6. Determine el signo de comparación que se debe ubicar en el recuadro:

   Sen 110º ○ Sen 10º

   Cos 200º ○ Cos 100º

a) >; > b) >; = c) >; <
d) <; < e) =; <

7. ¿Cuál de los siguientes valores es el menor?
a) Cos20º b) Cos100º c)Cos160º
d) Cos260º e) Cos320º

8. Señale (V) o (F) en:
Tan 50º > Tan 70º ……… ( )
Tan100º > Tan140º …….. ( )
Tan200º > Tan 240º…….. ( )
a) FVV b) VFF c) VFV
d) FFF e) VVV

9. Si: $3\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < 2\pi$
Señale (V) o (F) en:
Sen α > senβ ( )
Tan α > tanβ ( )
Ctg α > Ctgβ ( )

a) VVF b) VVV c) FFF
d) FFV e) FVV

10. Determinar el área en: