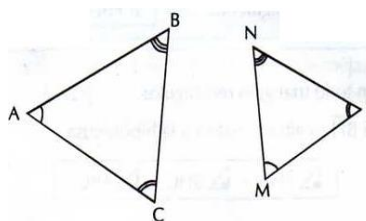
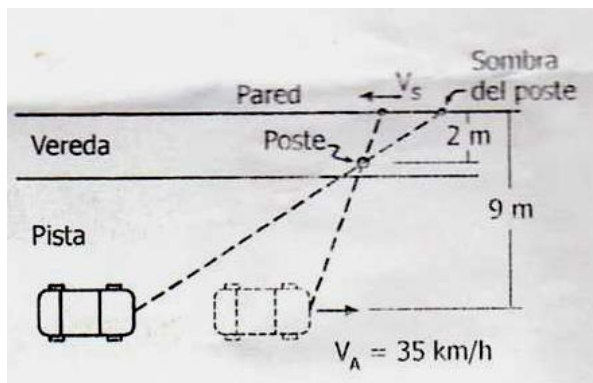




SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

La sombra:

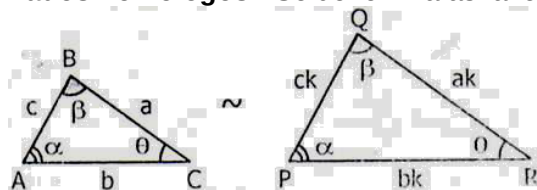
Un auto deslaza paralelamente a una pared sobre una pista, alumbrando con uno de sus faros un poste que se encuentra a 2 m de la pared. ¿A qué velocidad se deslaza la sombra del poste sobre la pared, si el auto se deslaza a 35Km/h y a 9 m de la pared?



Definición

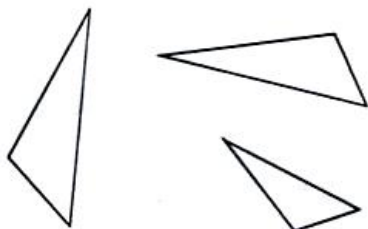
Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos de igual medida o sus lados homólogos respectivamente proporcionales.

Lados homólogos.- Se denomina así a los lados que se oponen a ángulos de igual medida.



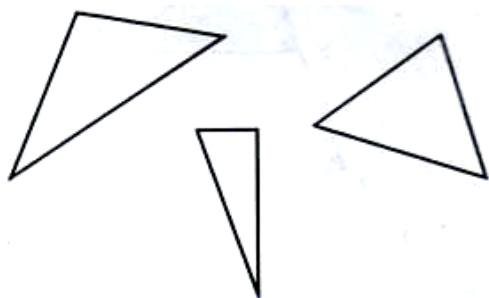
SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Estos triángulos son semejantes:



Tienen la misma forma

Estos triángulos no son semejantes:



No tienen la misma forma

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos, respectivamente congruentes.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\angle A &\cong \angle M \\ \angle B &\cong \angle N \\ \angle C &\cong \angle L \\ \Rightarrow \triangle ABC &\sim \triangle MNL\end{aligned}$$

El símbolo $\sim$ se lee: "es semejante a"

En dos triángulos semejantes siempre encontramos lo siguiente:

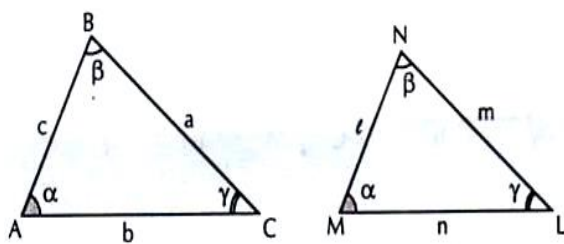
Ángulos Homólogos.- Son parejas de ángulos que son congruentes, es decir que tienen igual medida.

Ejemplo: $(\angle A, \angle M), (\angle B, \angle N), (\angle C, \angle L)$

Lados Homólogos.- Son parejas de lados que se oponen a ángulos homólogos.

Ejemplo: $(\overline{BC}, \overline{NL}), (\overline{AC}, \overline{ML}), (\overline{AB}, \overline{MN})$

Si dos triángulos son semejantes, sus lados homólogos **son proporcionales**.



En la figura

$$\triangle ABC \cong \triangle MNL$$

Entonces $\overline{BC}, \overline{AC}$ y $\overline{AB}$, son proporcionales a $\overline{NL}, \overline{ML}$ y $\overline{MN}$.

Es decir si: $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{l} = k$ es Razón de semejanza

Casos de semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si satisfacen las condiciones de cualquiera de los siguientes casos:

1er. Caso: (A . A)

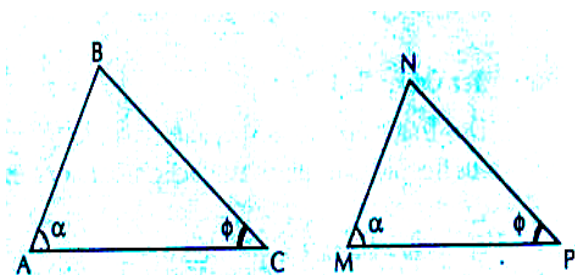
Dos triángulos son semejantes si dos ángulos en el primer triángulo son congruentes a dos ángulos en el segundo triángulo.

Si $m \angle A = m \angle M$ y

$m \angle C = m \angle P$

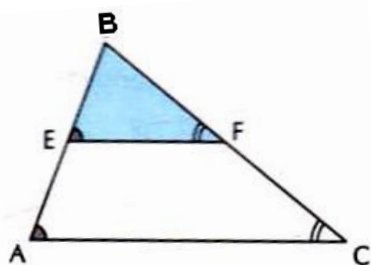
Entonces

$$\triangle ABC \sim \triangle MNP$$



Corolarios:

1.

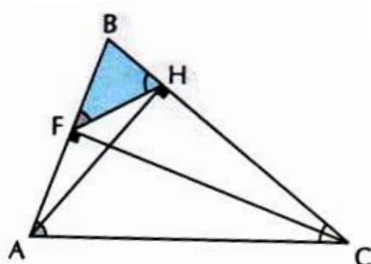


En todo triángulo:

Si $EF \parallel AC \Rightarrow$

$$\triangle EBF \sim \triangle ABC$$

2.



En todo triángulo:

Si $\overline{AH}$ y $\overline{CF}$ son alturas

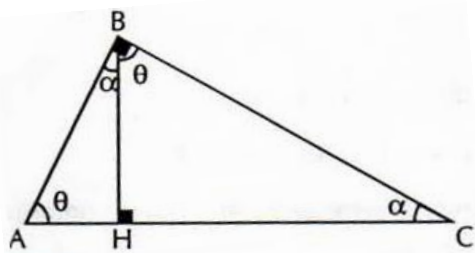
$\Rightarrow m \angle BFH = m \angle ACB$ y

$m \angle BHF = m \angle BAC$

y por consiguiente:

$$\triangle FBH \sim \triangle ABC$$

3.



En todo triángulo rectángulo

Si $\overline{BH}$ es altura relativa a la hipotenusa

$$BHA \sim BHC \sim ABC$$

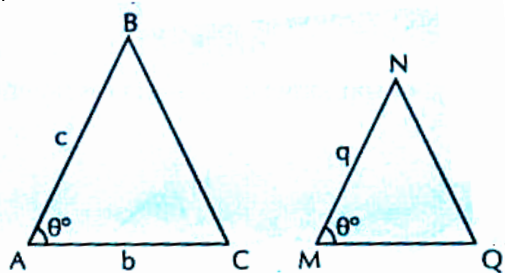
2do Caso (L.A.L)

Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales y los ángulos comprendidos congruentes.

$$\text{Si: } \frac{c}{q} = \frac{b}{n}$$

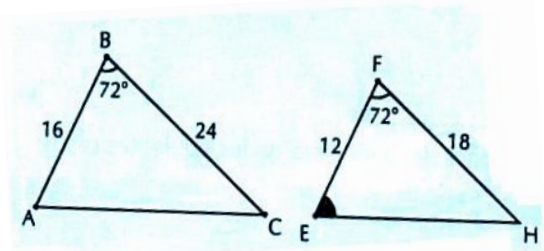
$$\Rightarrow m \angle A = m \angle M$$

$$\boxed{\triangle ABC \sim \triangle MNQ}$$



Ejemplo:

En la siguiente figura se cumple que:



I). AB y BC son proporcionales a EF y FH es decir:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FH} \quad \text{o sea:} \quad \frac{16}{12} = \frac{24}{18}$$

II). $m \angle B = m \angle F = 72^\circ$

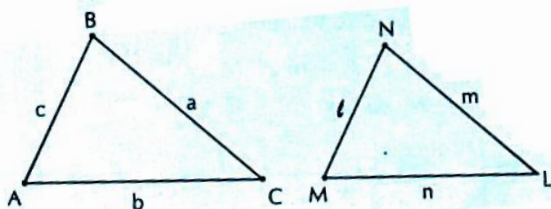
Luego:

$$\text{El } \boxed{\triangle ABC \sim \triangle EFH}$$

3er Caso: (L.L.L)

Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.

$$\text{Si: } \frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{l} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNL$$



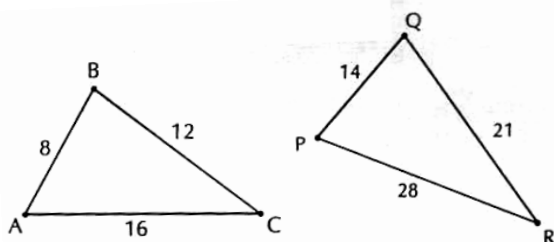
Ejemplo:

En la figura se cumple la relación:

$$\frac{8}{14} = \frac{12}{21} = \frac{16}{28} = K = \text{Razón de semejanza o sea } \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

Es decir: $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son **proporcionales** a $\overline{PQ}, \overline{QR}$ y $\overline{PR}$ respectivamente.

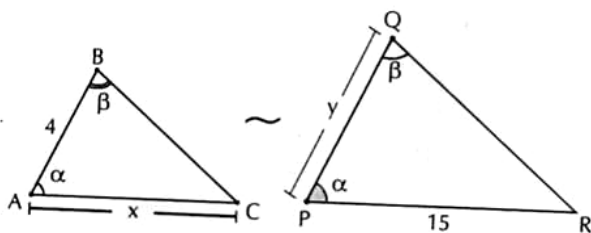
$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$



PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Problema 1. Dos triángulos ABC y PQR son semejantes $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $AB=4$, $PR=15$. Si la razón de semejanza es $2/3$, hallar AC y PQ.

Resolución:



Sea $AC = x$, $PQ = y$

De gráfico vemos que:

$\overline{AB}$ es el homólogo de $\overline{PQ}$

$\overline{AC}$ es el homólogo de $\overline{PR}$

$\overline{BC}$ es el homólogo de $\overline{QR}$

$$\text{Entonces: } \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = K$$

razón de semejanza

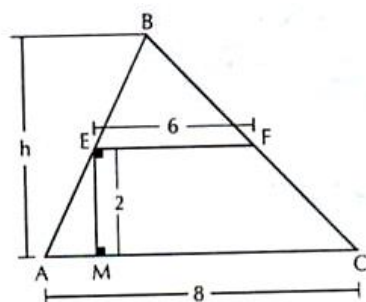
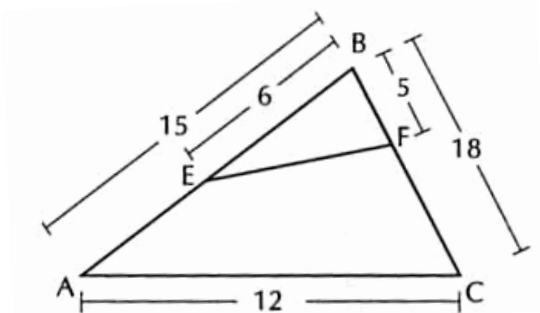
$$\Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{x}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\text{I) } \frac{4}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{y = 6}$$

$$\text{II) } \frac{x}{15} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

Problema 2 . En la figura hallar "EF"

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10



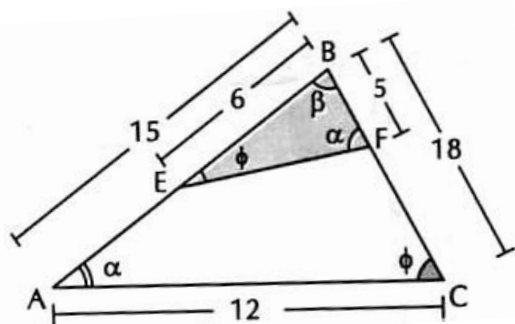
Resolución:

Del gráfico vemos que:

$$\frac{EB}{BC} = \frac{BF}{BA} \text{ es decir } \frac{6}{18} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Y $m \angle EBF = m \angle ABC$

Luego el $\triangle EBF \sim \triangle ABC$ por el caso L-A-L



Observación:

La proporción $\frac{EB}{BC} = \frac{BF}{BA}$ nos indica que EB y BF son proporcionales a BC y BA.

Luego:

EB Es homólogo con BC

$$\Rightarrow m \angle BFE = m \angle BAC = \alpha$$

BF Es homólogo con BA

$$\Rightarrow m \angle BEF = m \angle BCA = \phi$$

$\triangle EBF \sim \triangle ABC$ (L.A.L.)

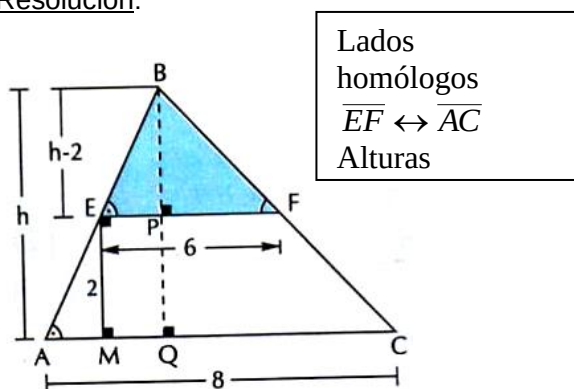
$$\frac{EB}{BC} = \frac{BF}{BA} = \frac{EF}{AC} \Rightarrow \frac{6}{18} = \frac{EF}{12}$$

$$EF = 4$$

Problema 3. Calcular la altura "h" del $\triangle ABC$, si $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$, $\overline{EF} = 6$; $AC = 8$; $EM = 2$.

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Resolución:

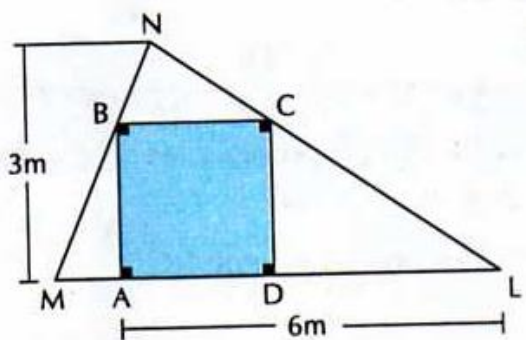


$$\triangle EBF \sim \triangle ABC \text{ (A - A)}$$

$$\frac{EF}{AC} = \frac{BP}{BQ}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{h-2}{h} \therefore h = 8 \quad \text{Rpta: A}$$

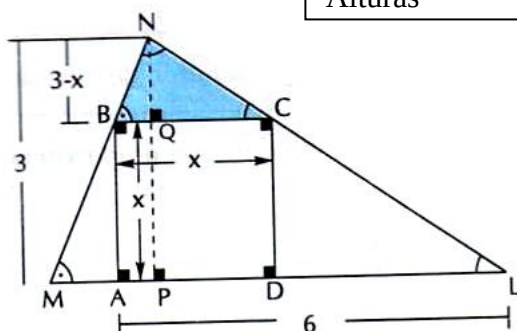
Problema 4. Calcular la longitud del lado del cuadrado ABCD.



- A) 1 m B) 2 m C) 2,5 m D) 3 m E) 1,5 m

Resolución:

Lados
homólogos
 $\overline{BC} \leftrightarrow \overline{ML}$
Alturas



Sea "x" la longitud pedida
 $\triangle BNC \sim \triangle MNL$ (A - A)

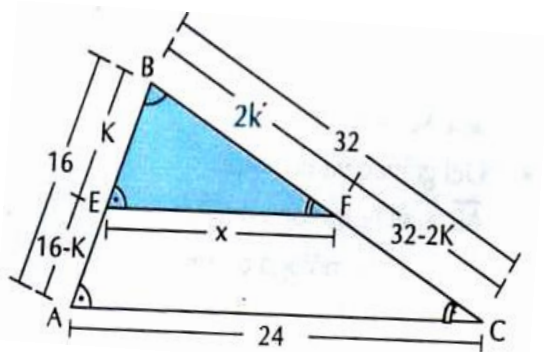
$$\frac{BC}{ML} = \frac{NQ}{NP} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{3-x}{3}$$

Resolviendo: $x = 2m$

Rpta: B

Problema 5. En un triángulo ABC: $AB = 16$; $BC = 32$; $AC = 24$; se traza $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ (E en $\overline{AB}$ y F en $\overline{BC}$) de modo que el perímetro del triángulo EBF es igual al perímetro del trapecio AEFC. Hallar "EF".

- A) 18 B) 16 C) 15
D) 14 E) 12



Resolución:

Sea $EF = x = ?$

En el $\triangle ABC$ = por Thales

$$\Rightarrow \frac{BE}{16} = \frac{BF}{32} \Rightarrow \frac{BE}{1} = \frac{BF}{2} = K$$

$$BE = K$$

$$BF = 2K$$

$$AE = 16 - K$$

$$CF = 32 - 2K$$

Según datos perimetro $\triangle EBF =$ perimetro $\square AEFC$

$$K + 2K + x = (16 - K) + x + (32 - 2K) + 24$$

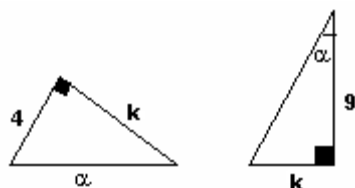
$$K = 12$$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Calcular "k":

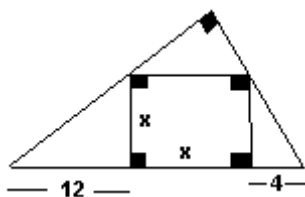
- A) 4
- B) 9
- C) 6
- D) 7
- E) 8



Resolución:

2. Calcular "x":

- A) $2\sqrt{3}$
- B) $4\sqrt{3}$
- C) 6
- D) $3\sqrt{3}$
- E) 4



Resolución:

3. En un triángulo ABC, $AB=4$; $BC=6$. Se traza $DE \parallel BC$ ("D" y "E" en AB y AC respectivamente), de modo que BE sea bisectriz del ángulo "B". Calcular "BD".

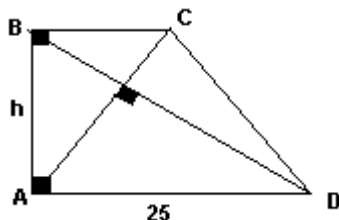
- A) 2,4
- B) 3,6
- C) 2,6
- D) 3,2
- E) 4,2

Resolución:

4. Hallar la altura del trapecio.

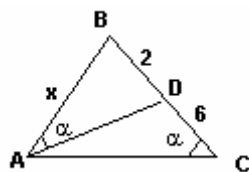
- A) 12
- B) 15
- C) 22
- D) 35
- E) 18

Resolución:



5. Calcular "x":

- A) 8
- B) 6
- C) 4
- D) 5
- E) 7



Resolución:

6. En un trapecio ABCD ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$), $\overline{BD} \perp \overline{AD}$ y $\angle BAD = \angle BDC$. Si $AD=9\text{cm}$ y $BC=1\text{ cm}$, entonces la longitud de $\overline{DC}$ es:

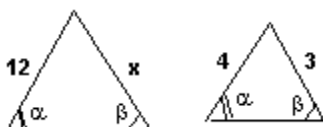
- A) 3
- B) $\sqrt{3}$
- C) 4
- D) $\sqrt{10}$
- E) $\sqrt{13}$

Resolución:

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

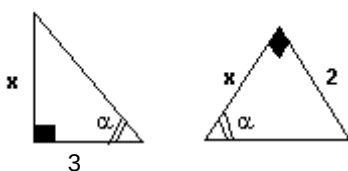
1. Calcular "x"

- A) 6
- B) 8
- C) 9
- D) 5
- E) 4



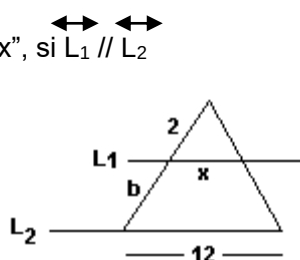
2. Calcular "x"

- A) 5
- B) 6
- C) $\sqrt{6}$
- D) 2,5
- E) 3



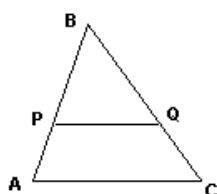
3. Calcular "x", si $L_1 \parallel L_2$

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5



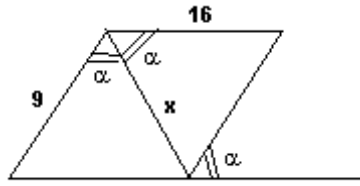
4. Hallar "PQ", si: $AC; AB=12; AC=8; AP=3$

- A) 9
- B) 4
- C) 6
- D) 4,5
- E) 5,5



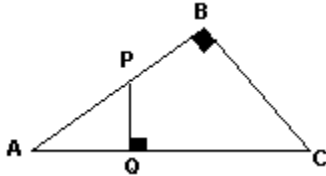
5. Calcular "x":

- A) 8
- B) 12
- C) 15
- D) 14
- E) 10



6. Calcular "BC", si $AP = 5$, $BP = 2$; $PQ = 3$

- A) 4,5
- B) 5,25
- C) 5,5
- D) 6
- E) 6,25

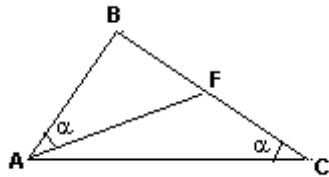


7. Calcular el perímetro de un triángulo si es semejante a otro, de lados: 6; 9 y 10. Además la razón con el primero es $1/5$.

- A) 5
- B) 25
- C) 100
- D) 125
- E) 250

8. Hallar "AB", si $BF = 4$, $PC = 5$

- A) 6
- B) 8
- C) 7
- D) 4,5
- E) 5,5



9. En un triángulo ABC, se inscribe el cuadrado PQRS ($\overline{SR} \subset \overline{AC}$). Si la altura relativa al lado AC mide "h" y $AC = b$, entonces la longitud de PQ es:

- A) $\frac{bh}{b+h}$
- B) $\frac{2bh}{b+h}$
- C) $\frac{b+h}{2}$
- D) $\sqrt{bh}$
- E) $3\sqrt{bh}$

10. Se tiene un cuadrilátero ABCD tal que $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$. Se toma un punto $M \in \overline{AC}$ tal que $\overline{MN} \perp \overline{BC}$ ($N \in \overline{BC}$), $\overline{MR} \perp \overline{AD}$ ($R \in \overline{AD}$)

Calcule $E = \frac{MN}{AB} + \frac{MR}{CD} + 1$

- A) $1/2$
- B) 1
- C) $3/2$
- D) 2
- E)