



RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

TRIGONOMETRIA

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

A) F.T. de la suma y diferencia de dos ángulos: $\boxed{\text{F.T.}(\alpha \pm \beta)}$

$$\boxed{\text{Sen}(\alpha \pm \beta) = \text{Sen}\alpha \bullet \text{Cos}\beta \pm \text{Cos}\alpha \bullet \text{Sen}\beta}$$

$$\boxed{\text{Cos}(\alpha \pm \beta) = \text{Cos}\alpha \bullet \text{Cos}\beta \mp \text{Sen}\alpha \bullet \text{Sen}\beta}$$

$$\boxed{\text{Tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{Tg}\alpha \pm \text{Tg}\beta}{1 \mp \text{Tg}\alpha \bullet \text{Tg}\beta}}$$

$$\boxed{\text{Ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{Ctg}\alpha \bullet \text{Ctg}\beta \mp 1}{\text{Ctg}\alpha \pm \text{Ctg}\beta}}$$

B) Identidades auxiliares:

$$\text{Sen}(\alpha + \beta) \bullet \text{Sen}(\alpha - \beta) = \text{Sen}^2\alpha - \text{Sen}^2\beta$$

$$\text{Cos}(\alpha + \beta) \bullet \text{Cos}(\alpha - \beta) = \text{Cos}^2\alpha - \text{Sen}^2\beta$$

$$\text{Tg}\alpha \pm \text{Tg}\beta = \frac{\text{Sen}(\alpha \pm \beta)}{\text{Cos}\alpha \bullet \text{Cos}\beta}$$

$$\text{Ctg}\alpha \pm \text{Ctg}\beta = \frac{\text{Sen}(\alpha \pm \beta)}{\text{Sen}\alpha \bullet \text{Sen}\beta}$$

$$\boxed{\text{Tg}(\alpha \pm \beta) = \text{Tg}\alpha \pm \text{Tg}\beta \pm \text{Tg}\alpha \bullet \text{Tg}\beta \bullet \text{Tg}(\alpha \pm \beta)}$$

Observación:

$$\boxed{a\text{Sen}\alpha \pm b\text{Cos}\alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \text{Sen}(\alpha \pm \varnothing)}$$

Donde: $\text{Tg}\varnothing = b/a$

C) F.T. de la suma de tres ángulos: $\boxed{\text{F.T.}(\alpha + \beta + \theta)}$

TRIGONOMETRIA

$$\text{Sen}(\alpha+\beta+\theta) = \text{Sen}\alpha\text{Cos}\beta\text{Cos}\theta + \text{Cos}\alpha\text{Sen}\beta\text{Cos}\theta + \text{Cos}\alpha\text{Cos}\beta\text{Sen}\theta - \text{Sen}\alpha\text{Sen}\beta\text{Sen}\theta$$

$$\text{Cos}(\alpha+\beta+\theta) = \text{Cos}\alpha\text{Cos}\beta\text{Cos}\theta - \text{Cos}\alpha\text{Sen}\beta\text{Sen}\theta - \text{Sen}\alpha\text{Cos}\beta\text{Sen}\theta - \text{Sen}\alpha\text{Sen}\beta\text{Cos}\theta$$

$$\text{Tg}(\alpha+\beta+\theta) = \frac{\text{Tg}\alpha + \text{Tg}\beta + \text{Tg}\theta - \text{Tg}\alpha\text{Tg}\beta\text{Tg}\theta}{1 - \text{Tg}\alpha\text{Tg}\beta - \text{Tg}\alpha\text{Tg}\theta - \text{Tg}\beta\text{Tg}\theta}$$

$$\text{Ctg}(\alpha+\beta+\theta) = \frac{\text{Ctg}\alpha\text{Ctg}\beta\text{Ctg}\theta - \text{Ctg}\alpha - \text{Ctg}\beta - \text{Ctg}\theta}{\text{Ctg}\alpha\text{Tg}\beta + \text{Ctg}\alpha\text{Ctg}\theta + \text{Ctg}\beta\text{Ctg}\theta - 1}$$

• Si $\alpha+\beta+\theta = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\text{Tg}\alpha + \text{Tg}\beta + \text{Tg}\theta = \text{Tg}\alpha\text{Tg}\beta\text{Tg}\theta$$

$$\text{Ctg}\alpha\text{Ctg}\beta + \text{Ctg}\alpha\text{Ctg}\theta + \text{Ctg}\beta\text{Ctg}\theta = 1$$

• Si $\alpha+\beta+\theta = (2k+1)\pi/2 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\text{Tg}\alpha\text{Tg}\beta + \text{Tg}\alpha\text{Tg}\theta + \text{Tg}\beta\text{Tg}\theta = 1$$

$$\text{Ctg}\alpha + \text{Ctg}\beta + \text{Ctg}\theta = \text{Ctg}\alpha\text{Ctg}\beta\text{Ctg}\theta$$

EJEMPLOS

1. Calcular $\text{Sen } 97^\circ$ y $\text{Tg } 82^\circ$ sin emplear tablas ni calculadora.

Solución

Cálculo del $\text{Sen } 97^\circ$:

$$\text{sen } 97^\circ = \text{sen}(60^\circ + 37^\circ)$$

$$\text{sen } 97^\circ = \text{sen } 60^\circ \cdot \text{cos } 37^\circ + \text{cos } 60^\circ \cdot \text{sen } 37^\circ$$

$$\text{sen } 97^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow \therefore = \frac{4\sqrt{3}+3}{10} \quad \text{Rpta.}$$

Cálculo de $\text{Tg } 82^\circ$:

$$\text{tg } 82^\circ = \text{tg } (45^\circ + 37^\circ)$$

$$\text{tg } 82^\circ = \frac{\text{tg } 45^\circ + \text{tg } 37^\circ}{1 - \text{tg } 45^\circ \text{tg } 37^\circ}$$

$$\text{tg } 82^\circ = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - 1 \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{4}} = 7$$

$$\therefore \text{Tg } 82^\circ = 7 \quad \text{Rpta.}$$

2. Simplificar la siguiente expresión:
 $\text{Sen}(60^\circ + \alpha) + \text{Cos}(30^\circ + \alpha)$

Solución:

Sabemos que:

- $\text{sen}(60^\circ + \alpha) = \text{sen } 60^\circ \cdot \cos \alpha + \cos 60^\circ \cdot \text{sen } \alpha$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} \cdot \text{sen } \alpha \dots (I)$$
- $\text{cos}(30^\circ + \alpha) = \cos 30^\circ \cdot \cos \alpha - \text{sen } 30^\circ \cdot \text{sen } \alpha$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{1}{2} \cdot \text{sen } \alpha \dots (II)$$

Sumamos miembro a miembro (I) y (II):

$$\text{sen}(60^\circ + \alpha) + \text{cos}(30^\circ + \alpha) = \sqrt{3} \cos \alpha$$

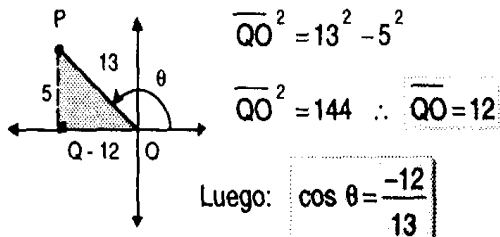
Rpta. $= \sqrt{3} \cdot \cos \alpha$

3. Siendo: $\text{Sen } \theta = 5/13$ ($\theta \in \text{IIC}$)
 y $\text{Tg } x = 7/24$ ($x \in \text{IIIC}$)
 Hallar el valor de $\text{Cos}(\theta + x)$.

Solución

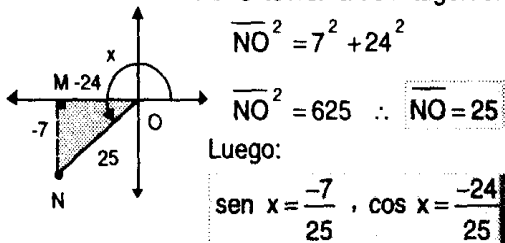
$\text{Sen } \theta = 5/13$ ($\theta \in \text{IIC}$)

• Por el teorema de Pitágoras:



$\text{Tg } x = 7/24$ ($x \in \text{IIIC}$)

• Por el teorema de Pitágoras:



Ahora hallamos el valor de: $\text{Cos}(\theta + x)$

$$\cos(\theta + x) = \cos \theta \cdot \cos x - \sin \theta \cdot \sin x$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta + x) &= \left(\frac{-12}{13}\right) \cdot \left(\frac{-24}{25}\right) - \left(\frac{5}{13}\right) \cdot \left(\frac{-7}{25}\right) \\ &= \frac{288 + 35}{325} = \frac{323}{325} \quad \text{Rpta.} \end{aligned}$$

¡CUIDADO! ES FALSO

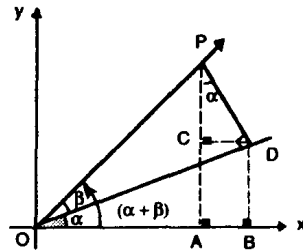
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha + \cos \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan \alpha + \tan \beta$$

PONTE MOSCA (demostración)

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ en la figura:



En el $\triangle OAP$:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{AP}{OP} = \frac{AC + CP}{OP}$$

Luego:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{BD + CP}{OP} = \frac{BD}{OP} + \frac{CP}{OP}$$

Multiplicamos cada término por OD

Multiplicamos cada término por PD

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{BD}{OD} \cdot \frac{OD}{OP} + \frac{CP}{PD} \cdot \frac{PD}{OP} \quad \dots (I)$$

- En el $\triangle OBD$: $\frac{BD}{OD} = \sin \alpha$

- En el $\triangle PCD$: $\frac{CP}{PD} = \cos \alpha$

- En el $\triangle ODP$: $\frac{OD}{OP} = \cos \beta$

- En el $\triangle ODP$: $\frac{PD}{OP} = \sin \beta$

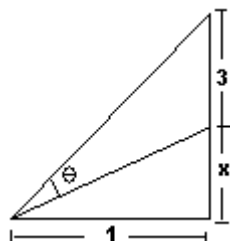
Reemplazamos los valores hallados en la ecuación (I)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

- 1- Calcular $\cos 105^\circ$
Calcular $\sin 81^\circ$
- 2- Si: $\tan (45^\circ + x) = 2$. Hallar $\tan x$
- 3- Si $\sin m = 1/3$
 $\cos n = \frac{\sqrt{6}}{3}$
Calcular $\tan (m - n)$
- 4- Se sabe que $\csc 13^\circ = \frac{x+y}{\sqrt{xy}}$
Calcular $\cos 77^\circ$
- 5- Reducir:
 $M = \cos 6x + \sin 5x \sin x$
- 6- Si $\cos (45^\circ - a) = \frac{\sqrt{2}}{3}$
Calcular $\sin a + \cos a$
7. Si $\tan x = \frac{1}{3}$ y $x - \alpha = 45^\circ$
Calcular $\tan \alpha$
8. Hallar x , si $\tan \theta = \frac{3}{11}$



REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

- 01- Si $\tan \theta = 0,5$ y $\tan \alpha = 0,25$
Calcular $\cotg (\theta + \alpha)$
 - a) 0,24 b) 1 c) $-\frac{2}{9}$
 - d) $\frac{3}{4}$ e) 0,8

02- Calcular:

$$\cos 56^\circ$$

$$\csc 48^\circ$$

03- Simplificar:

$$Q = \sin (30^\circ + A) + \cos (60^\circ + A)$$

a) $\cos A$ b) $2 \sin A$ c) $\sin A$

d) $2 \cos A$ e) 2

04- ¿A qué es igual?

$$U = \sin x + \sin (x - 60^\circ) + \sin (x + 60^\circ)$$

a) $\tan x$ b) $2 \tan x$ c) $2 \sin x$

d) $\sin x$ e) $\sec x$

05- Reducir:

$$H = \sin 5\alpha \cdot \sin 2\alpha + \cos 7\alpha$$

a) $\sin 5\alpha \cos 7\alpha$ b) $\sin 2\alpha$

c) $\cos 2\alpha \cos 5\alpha$ d) $\sin \alpha \cos \alpha$

e) 2

06- Si $\tan (a + b) = 2$; $\tan a = 1$ Encontrar $\tan b$

a) $\frac{1}{3}$ b) 1 c) $\frac{1}{2}$

d) -3 e) 3

07- A que es igual

$$S = \sin 15^\circ \cdot \sin 75^\circ$$

a) $\frac{1}{4}$ b) 1 c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ e) $\sqrt{5}$

08- En la figura adjunta ABCD es un cuadrado. Hallar $\tan \alpha$

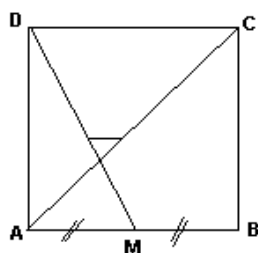
a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) N.A



09- Hallar S en

$$S = \text{Sen } 75^\circ + \text{Cos } 15^\circ + \text{Tan } 15^\circ$$

- a) $\sqrt{2} + \sqrt{6}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $4 + 2\sqrt{3}$
 d) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} - 2\sqrt{3} + 4}{2}$ e) N.A.

10- Reducir :

$$\text{Sen } 70^\circ \text{Cos } 10^\circ + \text{Cos } 70^\circ \text{Sen } 10^\circ$$

- a) $\text{Cos } 60^\circ$ b) $\text{Cos } 80^\circ$ c) $\text{Sen } 60^\circ$
 d) $\text{Sen } 80^\circ$ e) N.A.

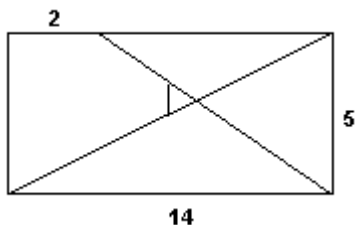
11- Reducir:

$$E = \frac{\text{Sen}(a+b) + \text{Sen}(a-b)}{\text{Cos}(a+b) + \text{Cos}(a-b)}$$

- a) $\text{Tan } a$ b) $\text{Tan } b$ c) $\text{Ctg } a$
 d) $\text{Ctg } b$ e) 1

OTROS PROBLEMITAS

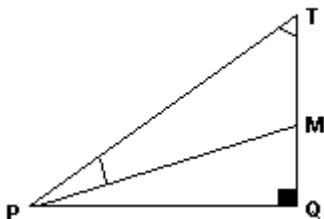
1. Hallar $\sqrt{221} \text{ Sen } \alpha$



2. Si $\text{Tan } \alpha \text{ Tan } \beta = 1$ y

$$\text{Sen } \alpha \text{ Sen } \beta = \frac{12}{25} \text{ . Hallar el valor de } \text{Cos } (\beta - \alpha)$$

3. En la figura, $\overline{PM}$ es mediana y $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$. Calcular $\text{Tan } \alpha$



4. $\tan(a + b + c) = \frac{3}{5}$ y $\tan b = 3$ Calcular $\tan(a - b + c)$

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Reducir:

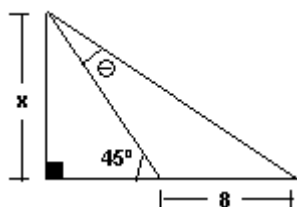
$$U = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} - \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$$

- a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$
d) 0 e) $\frac{3}{4}$

2. Siendo: $\sin \theta = \frac{5}{13}$ ($\theta \in \text{II C}$) y $\tan x = \frac{7}{24}$ ($x \in \text{II C}$). Hallar el valor de $\cos(\theta + x)$

- a) 321 b) 325 c) $\frac{225}{323}$
d) $\frac{323}{325}$ e) N.A.

3. Hallar "x", si $\tan \theta = \frac{2}{3}$



- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) N.A.

4. Reducir:

$$Q = (\sin \alpha - \cos \alpha) (\cos \theta - \sin \theta) - \sin(\alpha + \theta)$$

- a) $\cos \alpha \cos \theta$ b) $\sin \alpha \sin \theta$
c) $-\cos \alpha$
d) $-\cos \alpha \cdot \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta$
e) N.A.

5. Simplifica:

$$\frac{\tan(B - A) + \tan A}{1 - \tan(B - A)\tan A}$$

- a) Sec B b) Ctg B
c) Tan B d) Csc B
e) N.A.

6. Calcular $\text{Sen } 82^\circ$

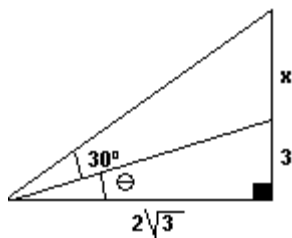
- a) $7\sqrt{2}$ b) $\frac{7}{10}$ c) $\sqrt{2}$
d) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ e) N.A.

7. Calcular $\text{Cos } 75^\circ$

- a) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) N.A.

8. Hallar "x" en:

- a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) N.A.



9. Si a y b son arcos del 1er cuadrante y $\text{Sen } a = \frac{4}{5}$; $\text{Sen } b = \frac{3}{5}$

Calcular: $\text{Sen}(a - b) + \text{Cos}(a + b)$

- a) $\frac{12}{25}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{31}{25}$
d) $\frac{24}{25}$ e) N.A.

10. Sabiendo que $a + b = 45^\circ$:

Calcular: $\tan a + \tan b + \tan a \tan b$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) N.A.

MISCELÁNEA

1. Demostrar que:

$$\frac{\operatorname{Tg} x - \operatorname{Sen} x}{\operatorname{Sen}^3 x} = \frac{\operatorname{Sec} x}{1 + \operatorname{Cos} x}$$

2. Simplifica la siguiente expresión:

$$V = \operatorname{ctg} \varnothing \cos \varnothing - \operatorname{csc} \varnothing - \operatorname{sen} \varnothing$$

- a) 0 b) -1 c) 1
d) $2\operatorname{sen} \varnothing$ e) $-2\operatorname{sen} \varnothing$

3. Reduce la siguiente expresión:

$$V = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha} + \frac{1 + \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

- a) $2\operatorname{sec} \alpha$ b) $2\operatorname{csc} \alpha$ c) $3\operatorname{tg} \alpha$
d) $3\operatorname{ctg} \alpha$ e) $2\operatorname{sen} \alpha$

4. Si $\operatorname{cos} \theta = a$, calcular "y" de la siguiente expresión:

$$y = (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) / (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)$$

- a) $1/(1+a^2)^2$ b) $a^2/(1+a^2)$ c) a^4
d) $1/(1+a^2)$ e) $1/a^4$

5. Elimina $\varnothing$ de: $\operatorname{tg} \varnothing = x \wedge \operatorname{sec} \varnothing = y$

6. Poner el signo de $>$; $<$ ó $=$ en:

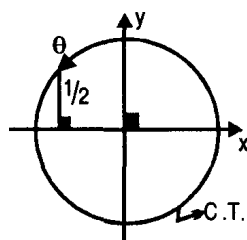
- I. $\operatorname{Sen} 20^\circ$ () $\operatorname{Sen} 80^\circ$
II. $\operatorname{Cos} 40^\circ$ () $\operatorname{Cos} 300^\circ$
III. $\operatorname{Cos} 190^\circ$ () $\operatorname{Cos} 340^\circ$

7. Indicar "V" ó "F" según corresponda:

- I. $\operatorname{Sen} 3 < \operatorname{Sen} 1$ ()
II. $\operatorname{Cos} 6 < \operatorname{Cos} 5$ ()
III. $\operatorname{Sen} 1 > \operatorname{Cos} 1$ ()

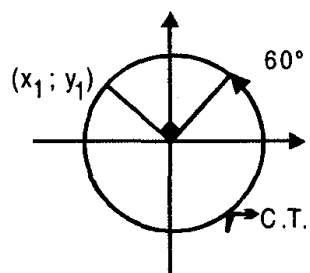
8. Calcular el valor de " θ ".

- a) 120°
b) 150°
c) 145°
d) 130°
e) 160°



9. Determina el valor de x_1/y_1 en la C.T.

- a) $-\sqrt{3}$
- b) $-1/2$
- c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- d) $-2\sqrt{3}$
- e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$



10. Simplificar:

$$E = \frac{\tan(-x)}{\tan x} + \frac{\sin(x-y)}{\sin(y-x)}$$

- a) 1
- b) 2
- c) -2
- d) -1
- e) 0

11. Simplificar:

$$E = \frac{\sin(\pi + x) \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$$

- a) 1
- b) -1
- c) $\tan x$
- d) $-\tan x$
- e) $\cot x$