



PUNTOS NOTABLES ASOCIADOS AL TRIÁNGULO

Objetivos

Al finalizar el presente capítulo, el lector estará en la capacidad de:

- Conocer la propiedad de concurrencia de las líneas notables de una misma especie en los triángulos.
- Conocer la recta de Euler y los triángulos especiales.
- Aplicar ciertas propiedades de triángulos y cuadriláteros con las circunferencias que le asocian.

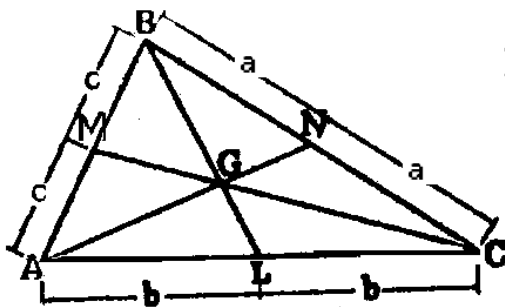
Introducción

En la naturaleza notamos que existe la concurrencia de algunos ríos pequeños en un punto, de un río mayor a otro, la concurrencia de tres fuerzas que actúan sobre un cuerpo en reposo, la concurrencia de los rayos solares reflejados en un espejo parabólico.

Geoméricamente, punto de concurrencia es el punto común que contienen tres o más rectas o líneas en general: y notamos en los casos anteriores que la concurrencia permite encontrar ciertas propiedades en dicho punto, es así como en ciertas figuras geométricas como el triángulo y el cuadrilátero la concurrencia de ciertas líneas notables de una misma especie o una misma característica, permite conocer más propiedades en dichas figuras.

BARICENTRO

Es el punto de concurrencia de las medianas respecto a un triángulo. El baricentro o centro de gravedad de una región triangular divide a una mediana en la razón de 2 a 1 (midiendo desde el vértice).



En la figura, G: baricentro de la región triangular ABC. Propiedad del baricentro.

$$AG = 2(GN)$$

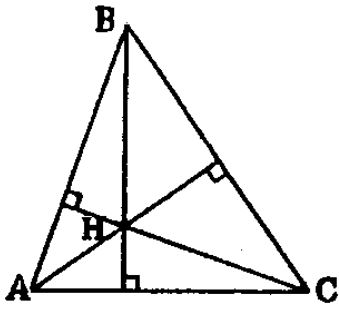
$$BG = 2(GL)$$

$$CG = 2(GM)$$

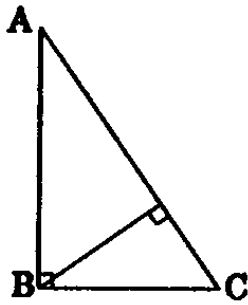
ORTOCENTRO

Es el punto de concurrencia de las Alturas o sus prolongaciones, en un triángulo.

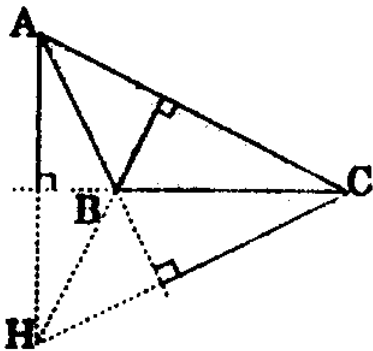
La posición del ortocentro respecto al triángulo depende de la naturaleza del triángulo.



En la figura
 $\triangle ABC$: acutángulo
H: ortocentro del $\triangle ABC$



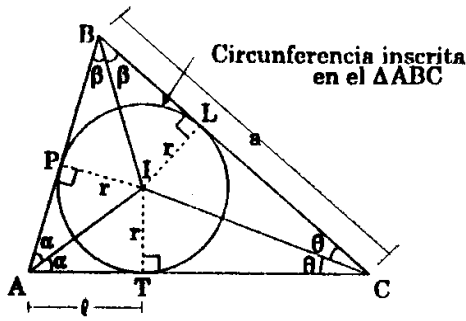
En la figura
 $\triangle ABC$: rectángulo, recto en B
B: ortocentro del $\triangle ABC$



En la figura
 $\triangle ABC$: obtusángulo, obtuso en B
H: ortocentro del $\triangle ABC$

INCENTRO

Es el punto de concurrencia de las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo. El incentro del triángulo, equidista de sus lados, por lo tanto es el centro de la circunferencia inscrita en dicho triángulo a cuyo radio se le denomina inradio del triángulo.



En la figura

I: incentro del $\triangle ABC$

r: inradio del $\triangle ABC$

P: L y T: puntos de tangencia

Propiedades

Del gráfico anterior, se cumplen:

$$m \angle AIC = 90^\circ + \frac{m \angle ABC}{2}$$

$$l = p - a$$

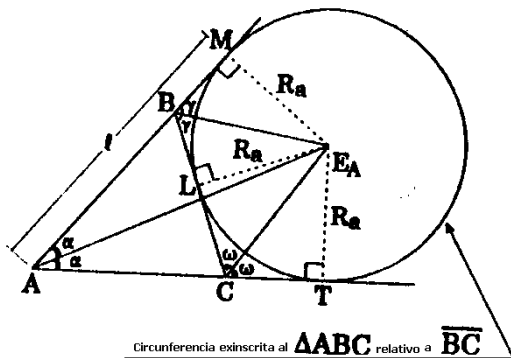
p: semiperímetro de la región triangular ABC.

EXCENTRO

Es el punto de concurrencia de las bisectrices de dos ángulos exteriores y la bisectriz de un ángulo interior en un triángulo.

El excentro del triángulo, equidista de sus lados, por lo tanto es el centro de la circunferencia exinscrita a dicho triángulo, a cuyo radio se le denomina exradio del triángulo.

Todo triángulo tiene tres excentros, tres circunferencias exinscritas y tres exradios; cada uno relativo a un lado del triángulo.



En la figura

EA: ex-centro del $\triangle ABC$: relativo a \overline{BC}

Ra: exradio del $\triangle ABC$: relativo a \overline{BC}

M, L y T: puntos de tangencia

Propiedades

Del gráfico anterior, se cumplen:

$$m \angle AEAC = \frac{m \angle ABC}{2}$$

$$m\angle BEAC = 90^\circ - \frac{m\angle BAC}{2}$$

$$l = p$$

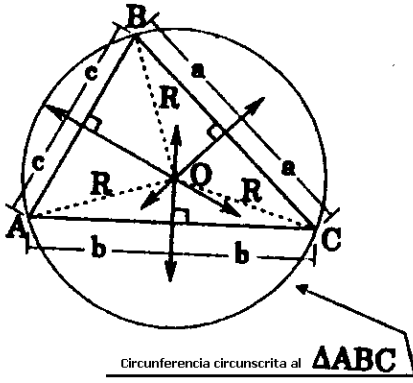
p: semiperímetro de la región triangular ABC.

CIRCUNCENTRO

Es el punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo.

El circuncentro del triángulo, equidista de los vértices, por lo tanto es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, a cuyo radio se le denomina circunradio del triángulo.

La posición del circuncentro respecto al triángulo, depende de la naturaleza del triángulo.



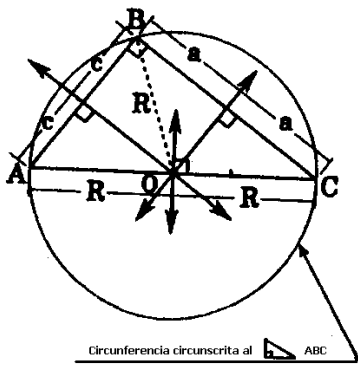
En la figura, ΔABC : ACUTÁNGULO

O: circuncentro del ΔABC

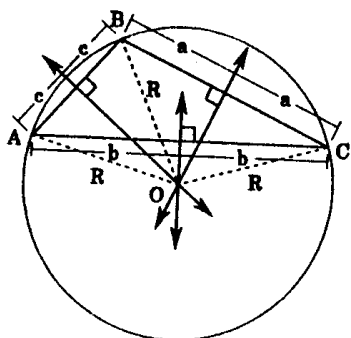
R: circunradio del ΔABC

Propiedad

$$m\angle AOC = 2(m\angle ABC)$$



En la figura,
 $\triangle ABC$: rectángulo, recto en B
 O: circuncentro del $\triangle ABC$
 R: circunradio del $\triangle ABC$

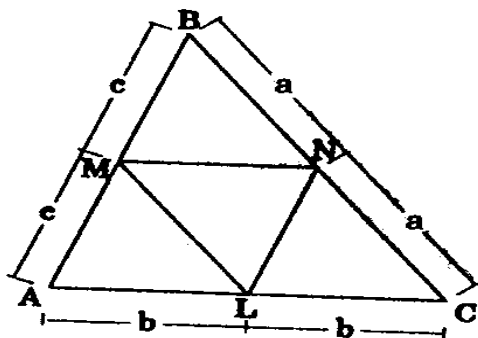


En la figura,
 $\triangle ABC$: obtusángulo, obtuso en B
 O: circuncentro del $\triangle ABC$
 R: circunradio del $\triangle ABC$

TRIÁNGULOS ESPECIALES

Triángulo mediano o complementario

Es aquel triángulo que se determina al unir los puntos medios de los lados de un triángulo dado.



En la figura
 M, N y L: puntos medios de \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} respectivamente.
 $\triangle MNL$: triángulo mediano o complementario del $\triangle ABC$.

Propiedades

- El baricentro de un triángulo es el baricentro de su triángulo mediano.
- El circuncentro de un triángulo, es el ortocentro de su triángulo mediano.

Triángulo órtico o pedal

Es aquel triángulo que se determina al unir los pies de las alturas de un triángulo. Sólo tienen triángulo órtico los triángulos oblicuángulos.

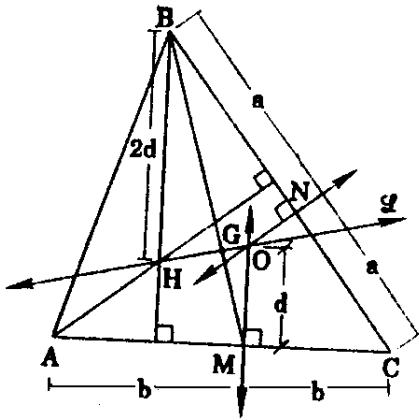
En la figura, $\triangle ABC$; acutángulo P, Q y R pies de las alturas del $\triangle ABC$.

Propiedades

- El ortocentro de un triángulo acutángulo es el incentro de su triángulo ortico.
- Los vértices de un triángulo acutángulo son los excentros de su triángulo ortico.

Recta de Euler

En todo triángulo no equilátero, el ortocentro, baricentro y circuncentro, son colineales y la recta que los contiene es denominada "recta de Euler".



En la figura H, G y O son el ortocentro, baricentro y circuncentro del $\triangle ABC$ respectivamente.

Entonces:

: recta de Euler del $\triangle ABC$

Propiedades

1. En todo triángulo, se cumple que la distancia de un vértice al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a dicho vértice. En la figura, se cumple:

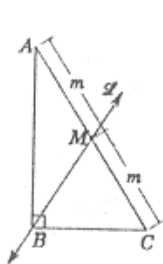
$BH = 2(OM)$

$AH = 2(ON)$

2. En todo triángulo, se cumple que la distancia de un vértice al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a dicho vértice. En la figura, se cumple

$HG = 2(GO)$

Nota:



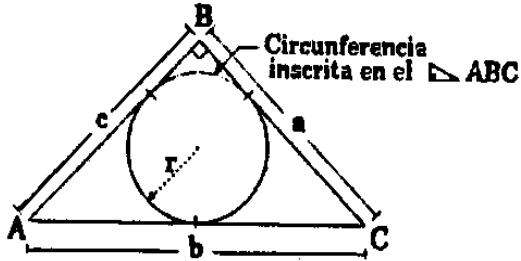
En $\triangle ABC$
 \overline{BM} : mediana relativa a la hipotenusa



$\triangle ABC$ (isósceles)
 altura relativa a la base \overline{AC}

Teorema de Poncelet

En todo triángulo rectángulo, se cumple que la suma de las longitudes de sus catetos es igual a la suma de la longitud de su hipotenusa y el doble del inradio de dicho triángulo.

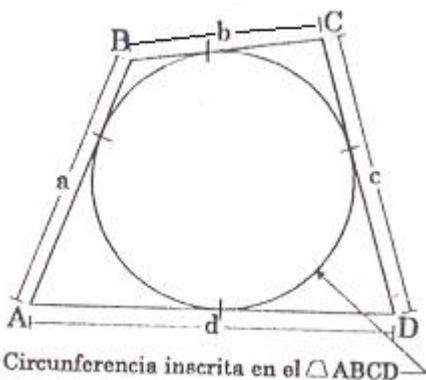


En la figura r : radio de $\triangle ABC$ se cumple:

$$a + c = b + 2r$$

Teorema de Pitot

En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, la suma de las longitudes de sus lados opuestos son iguales.



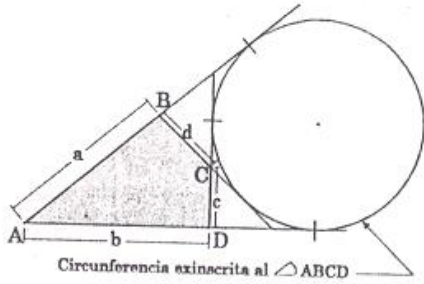
En la figura, $\triangle ABCD$: circunscrito a la circunferencia.

Se cumple:

$$a + c = b + d$$

Teorema de Steiner

En todo cuadrilátero exinscrito, la diferencia de las longitudes de sus lados opuestos, son iguales.



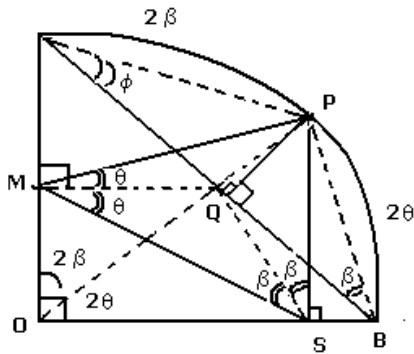
En la figura, $\triangle ABCD$: exinscrito a la circunferencia.
Se cumple:

$$a - c = b - d$$

EJEMPLOS

1. En un cuadrante AOB, en el área AB se ubica el punto P trazándose el rectángulo PMOS ($M \in \overline{AO}$), luego se traza ($PQ \perp \overline{AB}$). ¿Qué punto notable es Q en el triángulo MPS?
 - a) circuncentro
 - b) baricentro
 - c) ortocentro
 - d) incentro
 - e) excentro

Resolución:



$$m\angle QMP = \theta \quad m\angle QSP = \beta$$

$\triangle MQPA$: Inscriptible

$$\Rightarrow m\angle PAQ = \theta$$

$\triangle PQSB$: Inscriptible

$$\Rightarrow m\angle PBQ = \beta$$

$$m\widehat{PB} = 2\theta \Rightarrow m\angle POB = 2\theta$$

$$m\widehat{AP} = 2\beta \Rightarrow m\angle AOP = 2\beta$$

En el rectángulo OMPS:

$$m\angle PMS = m\angle POB = 2\theta$$

$$m\angle RSM = m\angle AOP = 2\beta$$

$$m\angle PSQ = m\angle QSM = P \text{ y}$$

$$m \angle PMQ = \theta$$

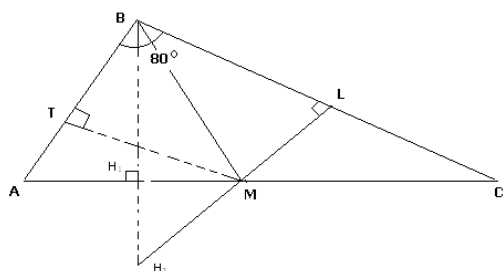
$\therefore Q$: incentro del $\triangle MPS'$

2. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BM. Luego se ubican los ortocentros H_1 y H_2 en los triángulos ABM y BMC respectivamente.

Si $m \angle ABC = 80^\circ$. Calcular $m \angle H_1 M H_2$

- a) 70° b) 80° c) 75°
 d) 85° e) 60°

Resolución:



Piden: $m \angle H_1 M H_2 = x$

H_1 ortocentro del $\triangle ABM$

$$\Rightarrow \overline{MH_1} \perp \overline{AB}$$

H_2 ortocentro del $\triangle BMC$

$$\Rightarrow \overline{H_2M} \perp \overline{BC}$$

\square TBLM: Inscriptible

$$\Rightarrow x = 80^\circ$$

CONSTRUYENDO

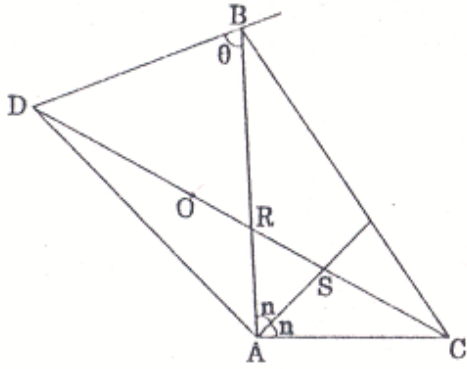
MIS CONOCIMIENTOS

1. En el gráfico:

O: circuncentro del $\triangle ABD$

D: Excentro del $\triangle ABC$ relativo al lado AB

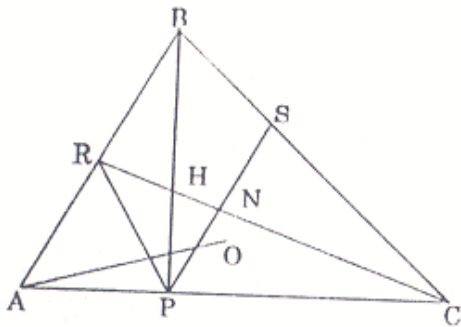
Siendo $DO = a$ y $OR = b$. Calcule RS



- a) $2a - \frac{b}{2}$ b) $a - b$ c) $a - b$
 d) $a - \frac{b}{2}$ e) $2a - b$

Resolución:

2. En el gráfico mostrado H y O son ortocentro y circuncentro del triángulo ABC, $m\angle PSC + m\angle OAC = 90^\circ$ y $BC = 3(RP)$, calcule $\frac{PC}{NP}$.



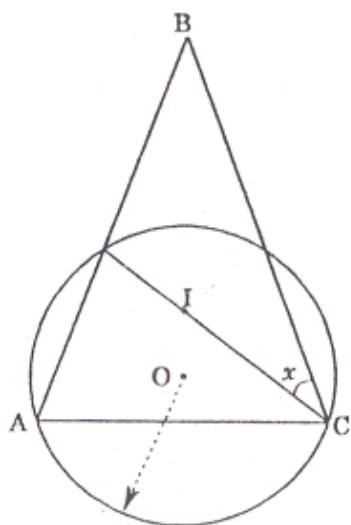
- a) $\frac{2}{2}$ b) 2 c) $\frac{1}{3}$
 d) 3 e) $\frac{3}{2}$

Resolución:

3. En una semicircunferencia de diámetro AB se ubican los puntos M, N y P tal que $M \in \widehat{AN}$ y $N \in \widehat{MB}$. Desde P se traza la perpendicular PH a \overline{AB} ($H \in AB$) si \overline{NB} y \overline{MB} intersecan a \overline{PH} en S y Q. Luego se ubica T en la región exterior relativa a \overline{MN} . Si $NS = SQ$; $MT = TN$ $m\angle MTN = m\angle SQB$ y $\overleftrightarrow{MS} \cap \overleftrightarrow{NT} = \{0\}$ ¿Qué punto notable es O del triángulo MNB?
- a) circuncentro
 b) incentro
 c) ortocentro
 d) excentro

Resolución:

4. En el gráfico I y O son incentro y ortocentro del triángulo respectivamente. Calcule x.



- a) 30° b) 36° c) 37°
 d) 45° e) 53°

Resolución:

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

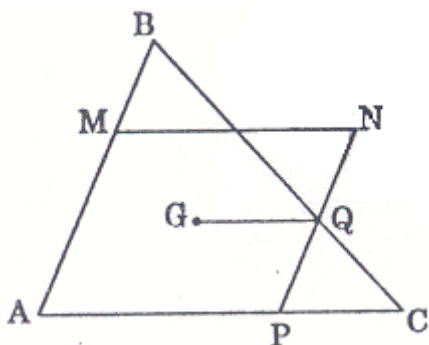
1. En un triángulo acutángulo ABC la recta del Euler intersecta a \overline{BC} y \overline{AB} en los puntos M y N respectivamente tal que $BM = BN$, calcule $m \angle ABC$.

- a) 45° b) 75° c) 72°
 d) 53° e) 60°

2. En un triángulo acutángulo ABC de ortocentro H sea M, P y L puntos medios de \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BH} respectivamente. Si $m \angle BAC = \alpha$, calcule $m \angle MLP$.

- a) 3α b) $\frac{\alpha}{2}$ c) $\frac{3\alpha}{2}$ d) α e) 2α

3. En el gráfico G es baricentro de la región triangular ABC y punto de intersección de las diagonales del paralelogramo AMNP. Calcule $\frac{GQ}{AC}$.



- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{5}$

- d) $\frac{3}{7}$ e) $\frac{4}{7}$

4. En un triángulo rectángulo ABC recto en B, en \overline{AB} y \overline{AC} se ubican los puntos N y T respectivamente tal que $m\angle NTC = 90^\circ$, $NT = TC$ y NB es igual al inradio del triángulo ATN. Calcule $m\angle BAC$.

- a) 60° b) 53° c) 45°
 d) 37° e) 30°

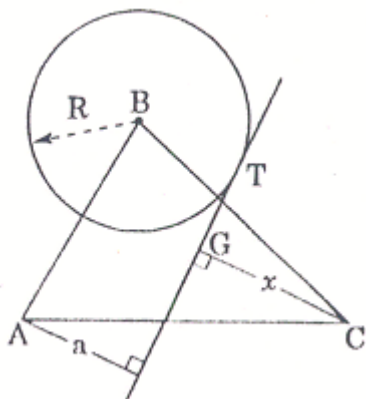
5. En un triángulo rectángulo ABC recto en B, sea E_c y E_a excentros relativos a los lados \overline{AB} y \overline{BC} respectivamente. Calcule $\frac{E_c E_a}{AC}$.

- a) 1,5 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{\frac{2}{2}}$
 d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

6. En un rectángulo ABCD se traza una semicircunferencia de diámetro \overline{AD} tangente al lado \overline{BC} en el punto T. Si $\overline{TD} \cap \overline{AC} = \{P\}$, calcule $m\angle TBP$.

- a) 45° b) 18° c) 16°
 d) 14° e) 15°

7. Según el gráfico, G es baricentro de la región ABC, calcule x en función de a y R (T es punto de tangencia)



- a) $R + a$ b) $2R - a$ c) $R + 2a$
 d) $3R - 2a$ e) $\frac{R+a}{2}$

8. En un triángulo ABC, con diámetro AC se traza una semicircunferencia que contiene al baricentro G de la región ABC. Si $AG = 2\sqrt{5}$ y $m\angle AG = 53^\circ$. Calcule BC.

- a) $5\sqrt{17}$ b) $2\sqrt{85}$ c) $4\sqrt{34}$
 d) $2\sqrt{34}$ e) $\sqrt{85}$

9. En un triángulo ABC de ortocentro H, la medida del ángulo ABC es θ , en la región exterior relativo a \overline{BC} se ubica el punto E tal que $m \angle HAC = m \angle HEC$, calcule la $m \angle BEH$.

- a) θ b) $\frac{\theta}{2}$ c) $90^\circ - 2\theta$
 d) $90^\circ - \theta$ e) 2θ

10.- un cuadrado ABCD con centro en B se traza el arco AC, luego se ubica M y N en \overline{AD} y \overline{CD} respectivamente siendo \overline{MN} tangente a \widehat{AC} en T, si \overline{BM} y \overline{BN} intersecan \overline{AC} en P y Q respectivamente, entonces el triángulo PTQ es:

- a) acutángulo
 b) obtusángulo
 c) rectángulo
 d) equilátero
 e) isósceles