



### PUNTOS NOTABLES ASOCIADOS AL TRIANGULO

#### Objetivos

Al finalizar el presente capítulo, el lector estará en la capacidad de:

- Conocer la propiedad e concurrencia de las líneas notables de una misma especie en los triángulos.
- Conocer la recta de Euler y los triángulos especiales.
- Aplicar ciertas propiedades de triángulos y cuadriláteros con las circunferencias que le asocian.

#### INTRODUCCIÓN

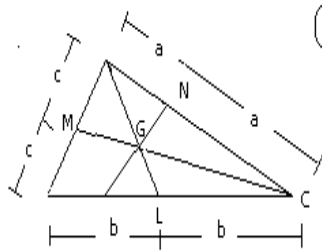
En la naturaleza notamos que existe la concurrencia de algunos ríos pequeños en un punto, de un río mayor a otro; la concurrencia de tres fuerzas que actúan sobre un cuerpo en reposo, la concurrencia de los rayos solares reflejados en un espejo parabólico.

Geoméricamente, punto de concurrencia es el punto común que contienen tres o más rectas o líneas en general y notamos en los casos anteriores que la concurrencia permite encontrar ciertas propiedades en dicho punto, es así como en ciertas figuras geométricas como el triángulo y el cuadrilátero la concurrencia de ciertas líneas notables de una misma especie o una misma característica, permite conocer mas propiedades en dichas figuras.

#### BARICENTRO.

Es el punto de concurrencia de las medianas respecto a un triángulo. El baricentro o centro de gravedad de una región triangular divide a una mediana en la razón de 2 a 1 (midiendo desde el vértice).

En la figura G: baricentro de la región triangular ABC.  
Propiedad del baricentro.



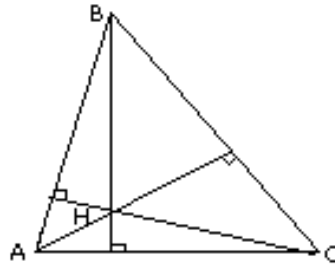
$$AG = 2(GN)$$

$$BG = 2(GL)$$

$$CG = 2(GM)$$

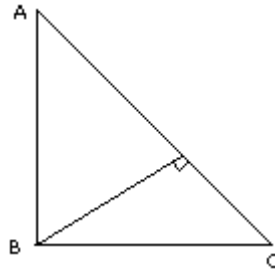
## ORTOCENTRO

Es el punto de concurrencia de las alturas o sus prolongaciones, en un triángulo.  
La posición del ortocentro respecto al triángulo depende de la naturaleza del triángulo.



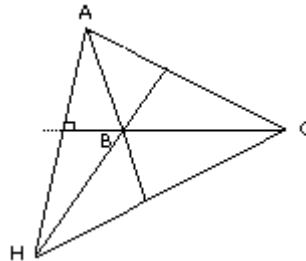
### En la figura

$\triangle ABC$ : acutángulo  
H: ortocentro del  $\triangle ABC$



### En la figura

$\triangle ABC$ : rectángulo, recto en B  
B: ortocentro del  $\triangle ABC$

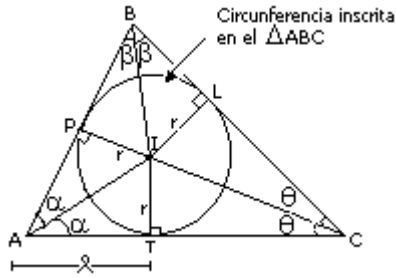


### En la figura

$\triangle ABC$ : obtusángulo, obtuso en B  
H: ortocentro del  $\triangle ABC$

## INCENTRO

En el punto de concurrencia de las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo. El incentro del triángulo, equidista de sus lados, por lo tanto es el centro de la circunferencia inscrita en dicho triángulo a cuyo radio se lo denomina inradio del triángulo.



**En la figura**

- I: incentro del  $\triangle ABC$
- r: inradio de  $\triangle ABC$
- P, L y T : puntos de tangencia

**Propiedades**

Del gráfico anterior se cumplen:

$$m \sphericalangle AIC = 90^\circ + \frac{m \sphericalangle ABC}{2}$$

$$\lambda = p - a$$

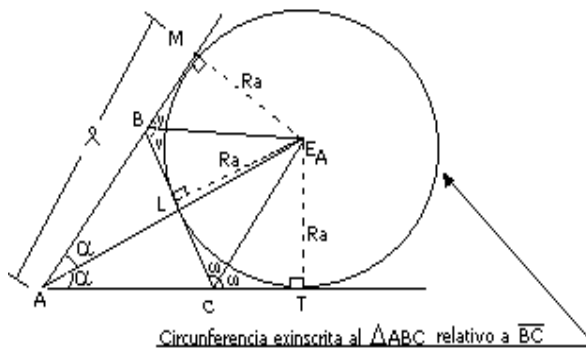
p: semiperímetro de la región triangular  $\triangle ABC$ .

**EXCENTRO**

Es el punto de concurrencia de las bisectrices de dos ángulos exteriores y la bisectriz de un ángulo interior en un triángulo.

El excentro del triángulo, equidista de sus lados, por lo tanto es el centro de la circunferencia exinscrita a dicho triángulo, a cuyo radio se le denomina exradio del triángulo.

Todo triángulo tiene tres excentros, tres circunferencias exinscritas y tres exradios; cada uno relativo a un lado del triángulo.



**En la figura**

- $E_A$ : ex-centro del  $\triangle ABC$ , relativo a  $\overline{BC}$
- $R_a$ : ex-centro del  $\triangle ABC$ , relativo a  $\overline{BC}$
- M, L y T: puntos de tangencia

## Propiedades

Del gráfico anterior, se cumplen:

$$m \angle AE_{AC} = \frac{m \angle ABC}{2}$$

$$m \angle BE_{AC} = 90^\circ - \frac{m \angle BAC}{2}$$

$$s = p$$

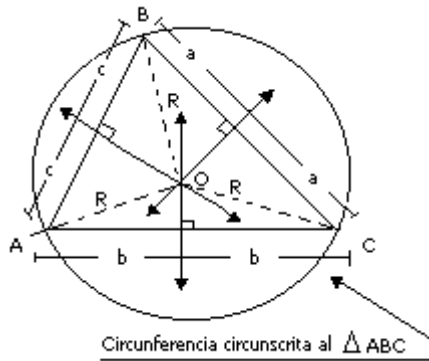
p: semi perímetro de la región triangular ABC.

## CIRCUNCENTRO

Es el punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un triángulo.

El circuncentro del triángulo, equidista de los vértices, por lo tanto es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, a cuyo radio se le denomina circunradio del triángulo.

La posición del circuncentro respecto al triángulo, depende de la naturaleza del triángulo.



## En la figura

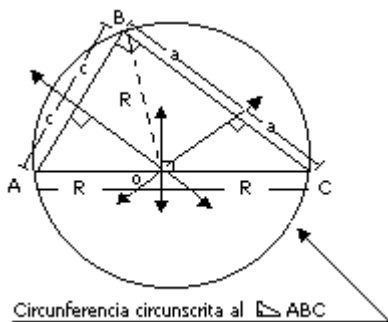
$\triangle ABC$ : acutángulo.

O: circuncentro del  $\triangle ABC$

R: circunradio del  $\triangle ABC$

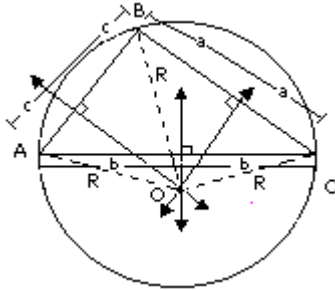
## Propiedad

$$m \angle AOC = 2(m \angle ABC)$$



**En la figura**

$\triangle ABC$ : rectángulo, recto en B.  
 O: circuncentro del  $\triangle ABC$   
 R: circunradio del  $\triangle ABC$



**En la figura**

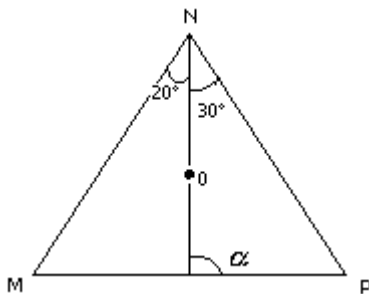
$\triangle ABC$ : obtusángulo, obtuso en B.  
 O: circuncentro del  $\triangle ABC$   
 R: circunradio del  $\triangle ABC$

**EJEMPLOS:**

1. Complete, según corresponda

- El ..... es el punto de concurrencia e las bisectrices.
- El baricentro de un triángulo, divide a toda mediana en la relación ..... es a uno.

1.  $\triangle MNP$ : O  $\rightarrow$  circuncentro. Hallar " $\alpha$ "



**Resolución:**

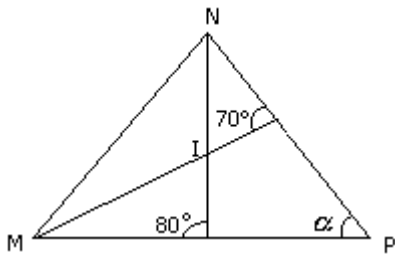
$\square$  OSPR:

$$\alpha + 120^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

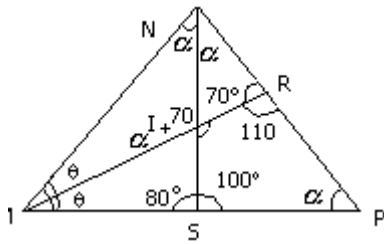
$$\alpha + 270^\circ = 360^\circ$$



4.  $\triangle MNP$  : "I"  $\rightarrow$  Incentro. Hallar " $\alpha$ "



**Resolución:**



$\triangle IRPS$ :

$$\alpha + 70 + 110 + 100 + \alpha = 360$$

$$2\alpha = 360 - 280$$

$$2\alpha = 80$$

$$\alpha = 40^\circ$$

**CONSTRUYENDO**

**MIS CONOCIMIENTOS**

1. En un triángulo rectángulo de hipotenusa igual a 24, calcular la distancia del ortocentro al baricentro.  
a) 4    b) 8    c) 12    d) 24    e) 6

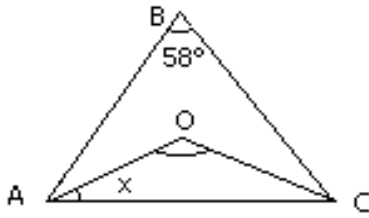
**Resolución :**

2. En un cuadrilátero ABCD se sabe que  $m^\star B = 120^\circ$ ,  $m^\star D = 110^\circ$ ;  $m^\star ABD = 60^\circ$  y  $m^\star ADB = 40^\circ$ . Hallar la medida del ángulo que forman sus diagonales.

- a)  $60^\circ$     b)  $55^\circ$     c)  $80^\circ$     d)  $70^\circ$     e)  $65^\circ$

**Resolución :**

3. En el triángulo ABC mostrado se sabe que "O" es el circuncentro del triángulo ABC. Sabiendo además que la medida del ángulo B es la que se indica, se puede calcular el valor de "x" que expresa la medida del ángulo OAC.



- a) 22°      b) 32°      c) 29°  
d) 42°      e) 25°

**Resolución :**

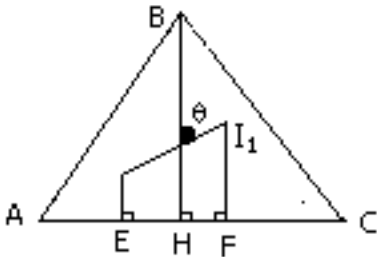
4. Se tiene un triángulo acutángulo ABC,  $\overline{BH}$ ,  $\overline{CQ}$  y  $\overline{AR}$  son alturas. Si  $m \angle A = 50^\circ$ . Hallar la  $m \angle QRH$ .

- a) 60°      b) 70°      c) 75°  
d) 80°      e) 65°

**Resolución :**

5. Si  $I \rightarrow$  incentro del  $\triangle ABH$ .  
 $I_1 \rightarrow$  incentro del  $\triangle HBC$

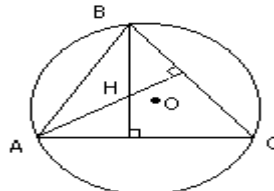
Además:  $IE = 1$   $\wedge$   $I_2 F = 7$ ; calcular el valor de "θ", que expresa la medida del ángulo indicado.



- a) 37°      b) 45°      c) 52°  
d) 53°      e) 46°

**Resolución :**

6. En el gráfico "H" es ortocentro y "O" es el circuncentro. Si:  $HA + HB = 12$ , hallar la suma de las distancias de "O" a  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$



- a) 3    b) 6    c) 7    d) 8      e) 10

## REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1. Hallar la distancia del circuncentro al baricentro en un triángulo si sus lados miden 5; 12 y 13.
 

a) 13      b)  $\frac{2}{5}$       c)  $\frac{13}{6}$       d) 6      e)  $\frac{3}{7}$
2. En un triángulo acutángulo la distancia del circuncentro al ortocentro es 24m. Calcular la distancia del ortocentro al baricentro del triángulo mencionado.
 

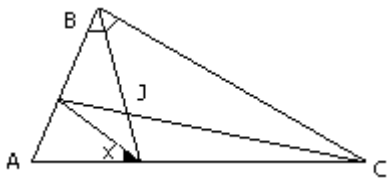
a) 12      b) 16      c) 8  
d) 14      e) 9
3. En un triángulo ABC, E es excentro relativo al lado  $\overline{BC}$ , si  $m\angle BAC = 4$ ,  
 $m\angle BEC$   
entonces la  $m\angle BAC$  es:
 

a)  $30^\circ$       b)  $45^\circ$       c)  $60^\circ$   
d)  $100^\circ$       e)  $120^\circ$
4. En un cuadrilátero ABCD, verifica que:  $m\angle ABD=20^\circ$ ,  $m\angle CBD=80^\circ$ ,  $m\angle BDA = 40^\circ$ , la  $m\angle BDC= 70^\circ$ . Calcule la  $m\angle ACD$ .
 

a)  $20^\circ$       b)  $15^\circ$       c)  $10^\circ$   
d)  $8^\circ$       e)  $12^\circ$
5. En un triángulo ABC, el punto "G" es el baricentro, por este punto pasa una recta "L" perpendicularmente a la mediana  $\overline{BM}$ , si la suma de las distancias desde las vértices A y C a ésta suman 20 cm.; entonces la longitud de  $\overline{BG}$  es:
 

a) 5 cm      b) 10 cm      c) 15 cm  
d) 20 cm      e) 25 cm
6. En un triángulo ABC,  $m\angle ABC= 60^\circ$ . Si el punto "O" es el circuncentro y el circunradio mide 12m., entonces la longitud de  $\overline{AC}$  es:
 

a)  $6\sqrt{3}$  cm      b)  $9\sqrt{3}$  cm      c)  $12\sqrt{3}$  cm  
d) 12 cm      e) 15 cm
7. En la figura,  $m\angle C = 30^\circ$ , así mismo I es el incentro del  $\triangle ABC$ , con estos datos se pide calcular "x".



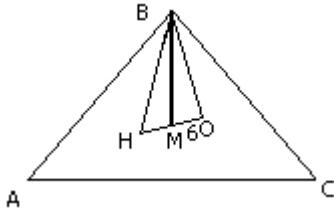
- a)  $75^\circ$       b)  $45^\circ$       c)  $35^\circ$       d)  $30^\circ$       e)  $15^\circ$

# GEOMETRIA

8. Dado el  $\triangle ABC$  mostrado, se pide calcular "x" si se sabe que  $m \angle B = 60^\circ$  y además:

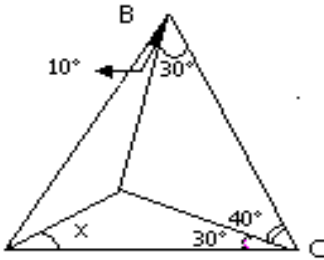
H  $\rightarrow$  ortocentro del  $\triangle ABC$

O  $\rightarrow$  circuncentro del  $\triangle ABC$



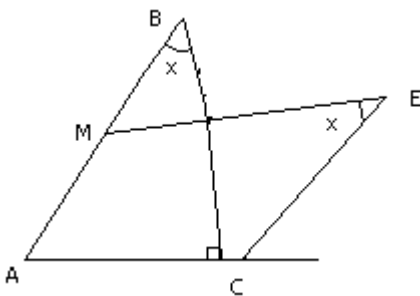
- a) 4    b) 5    c) 6    d) 7    e) 8

1. En el triángulo isósceles ABC, se han trazado varias líneas, las mismas que forman algunos ángulos de medidas conocidas e indicadas. Con estos datos se pide calcular "x".



- a)  $20^\circ$     b)  $60^\circ$     c)  $40^\circ$   
 d)  $35^\circ$     e)  $50^\circ$

2. Calcular el valor de x, si "E" es el excentro del triángulo ABC. Además se sabe que:  $AM=MB$



- a)  $30^\circ$     b)  $40^\circ$     c)  $50^\circ$   
 d)  $35^\circ$     e)  $45^\circ$