



PRODUCTOS NOTABLES I

INDICADOR: Efectúan multiplicaciones en forma directa.

Aplican productos notables en la Resolución de ejercicios y problemas.

PRODUCTOS NOTABLES

Son los resultados de ciertas multiplicaciones indicadas, que se obtienen en forma directa, sin efectuar la multiplicación.

A los productos notables también se les llama "Identidades Algebraicas".

Los más importantes son:

I. TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

$$(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplos:

- $(a+2)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 2 + 2^2 = a^2 + 4a + 4$
- $(2a-1)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 1 + 1^2 = 4a^2 - 4a + 1$

Corolario: Identidades de Legendre

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 \equiv 2(a^2 + b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 \equiv 4ab$$

Ejemplos:

- $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$
 $= 2(\sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2) = 10$
- $(x+5)^2 - (x-5)^2 = 4 \cdot x \cdot 5 = 20x$

Importante:

$$(a-b)^{2m} \equiv (b-a)^{2m} \quad ; m \in \mathbb{Z}$$

- $(a-b)^2 \equiv (b-a)^2$

desarrollando:

$$a^2 - 2ab + b^2 \equiv b^2 - 2ab + a^2$$

II. DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$$

Ejemplos:

- $(a+2)(a-2)=a^2-2^2=a^2-4$
- $(m-1)(m+1)=m^2-1$
- $(y+x)(x-y)=x^2-y^2$
- $(a^2-3)(a^2+3)=(a^2)^2-3^2=a^4-9$

III. TRINOMIO AL CUADRADO

$$(a+b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

Ejemplos:

- $(x+y+2)^2 = x^2+y^2+2^2+2(xy+2x+2y)$
 $= x^2+y^2+4+2xy+4x+4y$
- $(x+y-3)^2 = x^2+y^2+(-3)^2+2[xy+x(-3)+y(-3)]$
 $= x^2+y^2+9+2[xy-3x-3y]$
 $= x^2+y^2+9+2xy-6x-6y$

IV. BINOMIO AL CUBO

$$(a+b)^3 \equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3 \equiv a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Ejemplos:

- $(a+2)^3 = a^3+3a^2 \cdot 2+3a \cdot 2^2+2^3$
 $= a^3+6a^2+12a+8$
- $(2a-1)^3=(2a)^3-3(2a)^2 \cdot 1+3(2a) \cdot 1^2-1^3$
 $= 8a^3-12a+6a-1$

También:

$$(a+b)^3 \equiv a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 \equiv a^3-b^3-3ab(a-b)$$

Ejemplo:

- Si la suma de dos números es 4 y el producto es 5. calcular la suma de cubos.

Resolución:

$$(a+b)^3 \equiv a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

Reemplazamos: $a+b=4 \wedge ab=5$

$$\Rightarrow 4^3 = a^3 + b^3 + 3 \cdot 5 \cdot 4$$

$$64 = a^3 + b^3 + 60$$

$$\therefore a^3 + b^3 = 4$$

V. SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

$$a^3 + b^3 \equiv (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 \equiv (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplos:

- $(x+2)(x^2-2x+4) = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$
- $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{3}^3 + \sqrt[3]{2}^3 = 5$

VI. PRODUCTO DE BINOMIOS CON UN TÉRMINO COMÚN.

$$(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$$

Ejemplos:

- $(a+2)(a+3) = a^2 + (2+3)a + 2 \cdot 3$
 $= a^2 + 5a + 6$
- $(a+4)(a-1) = a^2 + (4-1)a + 4(-1)$
 $= a^2 + 3a - 4$
- $(a-6)(a+2) = a^2 + (-6+2)a + (-6)(2)$
 $= a^2 - 4a - 12$
- $(a-4)(a-5) = a^2 + (-4-5)a + (-4)(-5)$
 $= a^2 - 9a + 20$

También:

$$(x+a)(x+b)(x+c) \equiv x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$$

Ejemplos:

- $(x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + (1+2+3)x^2 + (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3)x + 1 \cdot 2 \cdot 3$
 $= x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
- $(x-2)(x+3)(x+4) = x^3 + (-2+3+4)x^2 + (-2 \cdot 3 + -2 \cdot 4 + 3 \cdot 4)x + (-2)(3)(4)$
 $= x^3 + 5x^2 - 2x - 24$

- $$(x+2)(x-4)(x+6) = x^3 + (2-4+6)x^2 + [2(-4) + (-4)6 + 6 \cdot 2]x + 2(-4)6$$

$$= x^3 + 4x^2 - 20x - 48$$
- $$(x+1)(x-3)(x-5) = x^3 + (1-3-5)x^2 + [1(-3) + (-3)(-5) + (-5) \cdot 1]x + 1(-3)(-5)$$

$$= x^3 - 7x^2 + 7x + 15$$
- $$(x-2)(x-4)(x-6) = x^3 + (-2-4-6)x^2 + [(-2)(-4) + (-4)(-6) + (-6)(-2)]x + (-2)(-4)(-6)$$

$$= x^3 - 12x^2 + 44x - 48$$

VII. TRINOMIO AL CUBO

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z)$$

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y+z)(xy+xz+yz) - 3xyz$$

Ejemplo: Si se verifica que:

$$a+b=1, \quad b+c=4, \quad a+c=3$$

Calcular: $a^3+b^3+c^3$

Resolución

$$\left. \begin{array}{l} a+b = 1 \\ b+c = 4 \\ a+c = 3 \end{array} \right\} \quad a+b+c = 4 \quad y$$

$$(a+b)(b+c)(a+c) = 12$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

$$4^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(12)$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 28$$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

- Si $m + n = 13$ y $mn = 18$
Hallar $m^3 + n^3$

Resolución:

Rpta. 1495

2. Efectuar:

$$\text{Si: } x - \frac{1}{x} = 2$$

$$\text{Hallar: } x^3 - \frac{1}{x^3}$$

Resolución:

Rpta: 14

3. Sabiendo que: $x + y + z = 12$ y
 $x^2 + y^2 + z^2 = 100$; hallar $(xy + xz + yz)$

Resolución:

Rpta. 22

4. Calcular M si:

$$M = \sqrt[16]{1 + 3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)}$$

Resolución

Rpta.: 2

5. Calcular: $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$

Si se sabe que $a + b = 3$ \wedge $ab = 5$

Resolución

Rpta. 18

6. Reducir:

$$K = \frac{(5x + 7y)^2 + (5x - 7y)^2}{(6x + y)^2 + (6y - x)^2}$$

Resolución:

Rpta: 2

7. Sabiendo que la suma de dos números es 10 y su producto es 4; hallar la suma de los inversos de los cuadrados de dichos números.

Resolución

Rpta. 5,75

8. Efectuar:
 $(a + b + c)(a + b - c) + (a + b - c)(a - b + c) + (a + b - c)(b - a - c) + (a - b + c)(b + c - a) + 4ab$
 Resolución:

Rpta. $8ab$

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Efectuar abreviadamente:
 $A = 16 + (x-2)(x+2)(x^2 + 4)$
- a) x b) x^2 c) x^3
 d) x^4 e) N.A.
2. Si: $a+b+c = 9$ y $a^2 + b^2 + c^2 = 29$
 Hallar el valor de: $ab + ac + bc$
- a) 20 b) 22 c) 24
 d) 26 e) N.A.
1. Si : $a + b = 5$ y $ab = 2$
 Hallar el valor de $a^3 + b^3$
- a) 90 b) 95 c) 100
 d) 105 e) N.A.
4. Efectuar:
- $$M = (\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{2}) (\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})$$
- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5
5. Si: $x + \frac{1}{x} = 3$, calcular
- $$K = x^3 + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$
- a) 20 b) 25 c) 18
 d) 7 e) 47

6. Si: $x(4 - x) = 1$
 Calcular: $E = x^3 + x^{-3}$

- a) 50 b) 51 c) 55
 d) 52 e) N.A.

7. Efectuar:

$$M = \sqrt[2^n]{b^{2^n} + \sqrt{b^{2^{n+1}} - a^{2^n}}} \cdot \sqrt[2^n]{b^{2^n} - \sqrt{b^{2^{n+1}} - a^{2^n}}}$$

- a) 1 b) 0 c) a
 d) b e) N.A.

8. Reducir:

$$N = \sqrt[3]{(x+1)(x^2 - x + 1)(x^6 - x^3 + 1)(x^{18} - x^9 + 1)} - 1$$

- a) x b) x^5 c) x^7
 d) x^9 e) N.A.

9. Si: $x + 2 = 23\sqrt{2x}$

Calcular:

$$Q = \frac{\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{2}}}{\sqrt[8]{2x}}$$

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$
 d) 1 e) N.A.

10. Calcular: $K = \sqrt[3]{571^3 - 491^3 - 240(571)(491)}$

- a) 70 b) 80 c) 90
 d) 100 e) N.A.