



PRODUCTOS NOTABLES I

I- PRODUCTOS NOTABLES

Son los resultados de ciertas multiplicaciones indicadas, que se obtienen en forma directa, sin efectuar la multiplicación.

A los productos notables también se les llama "Identidades Algebraicas".

Los más importantes son:

I. TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

$$(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplos:

- $(a+2)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 2 + 2^2 = a^2 + 4a + 4$
- $(2a-1)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 1 + 1^2 = 4a^2 - 4a + 1$

Corolario: Identidades de Legendre

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 \equiv 2(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 \equiv 4ab$$

Ejemplos:

- $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$
 $= 2(\sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2) = 10$
- $(x+5)^2 - (x-5)^2 = 4 \cdot x \cdot 5 = 20x$

Importante:

$$(a-b)^{2m} \equiv (b-a)^{2m} \quad ; m \in \mathbb{Z}$$

- $(a-b)^2 \equiv (b-a)^2$

desarrollando:

$$a^2 - 2ab + b^2 \equiv b^2 - 2ab + a^2$$

II. DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$(a+b)(a-b) \equiv a^2-b^2$$

Ejemplos:

- $(a+2)(a-2)=a^2-2^2=a^2-4$
- $(m-1)(m+1)=m^2-1$
- $(y+x)(x-y)=x^2-y^2$
- $(a^2-3)(a^2+3)=(a^2)^2-3^2=a^4-9$

III. TRINOMIO AL CUADRADO

$$(a+b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

Ejemplos:

- $(x+y+2)^2 = x^2+y^2+2^2+2(xy+2x+2y)$
 $= x^2+y^2+4+2xy+4x+4y$
- $(x+y-3)^2 = x^2+y^2+(-3)^2+2[xy+x(-3)+y(-3)]$
 $= x^2+y^2+9+2[xy-3x-3y]$
 $= x^2+y^2+9+2xy-6x-6y$

IV. BINOMIO AL CUBO

$$(a+b)^3 \equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3 \equiv a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Ejemplos:

- $(a+2)^3 = a^3+3a^2 \cdot 2+3a \cdot 2^2+2^3$
 $= a^3+6a^2+12a+8$
- $(2a-1)^3=(2a)^3-3(2a)^2 \cdot 1+3(2a) \cdot 1^2-1^3$
 $= 8a^3-12a+6a-1$

También:

$$(a+b)^3 \equiv a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 \equiv a^3-b^3-3ab(a-b)$$

Ejemplo:

- Si la suma de dos números es 4 y el producto es 5. calcular la suma de cubos.

Resolución:

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

Reemplazamos: $a+b=4 \wedge ab=5$

$$\Rightarrow 4^3 = a^3 + b^3 + 3 \cdot 5 \cdot 4$$

$$64 = a^3 + b^3 + 60$$

$$\therefore a^3 + b^3 = 4$$

V. SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplos:

- $(x+2)(x^2-2x+4) = x^3 + 2^3 = x^3 + 8$
- $(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) = \sqrt[3]{3}^3 + \sqrt[3]{2}^3 = 5$

VI. PRODUCTO DE BINOMIOS CON UN TÉRMINO COMÚN.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

Ejemplos:

- $(a+2)(a+3) = a^2 + (2+3)a + 2 \cdot 3$
 $= a^2 + 5a + 6$
- $(a+4)(a-1) = a^2 + (4-1)a + 4(-1)$
 $= a^2 + 3a - 4$
- $(a-6)(a+2) = a^2 + (-6+2)a + (-6)(2)$
 $= a^2 - 4a - 12$
- $(a-4)(a-5) = a^2 + (-4-5)a + (-4)(-5)$
 $= a^2 - 9a + 20$

También:

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc$$

Ejemplos:

- $$(x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + (1+2+3)x^2 + (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3)x + 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$= x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$
- $$(x-2)(x+3)(x+4) = x^3 + (-2+3+4)x^2 + (-2 \cdot 3 + -2 \cdot 4 + 3 \cdot 4)x + (-2)(3)(4)$$

$$= x^3 + 5x^2 - 2x - 24$$
- $$(x+2)(x-4)(x+6) = x^3 + (2-4+6)x^2 + [2(-4) + (-4)6 + 6 \cdot 2]x + 2(-4)6$$

$$= x^3 + 4x^2 - 20x - 48$$
- $$(x+1)(x-3)(x-5) = x^3 + (1-3-5)x^2 + [1(-3) + (-3)(-5) + (-5) \cdot 1]x + 1(-3)(-5)$$

$$= x^3 - 7x^2 + 7x + 15$$
- $$(x-2)(x-4)(x-6) = x^3 + (-2-4-6)x^2 + [(-2)(-4) + (-4)(-6) + (-6)(-2)]x + (-2)(-4)(-6)$$

$$= x^3 - 12x^2 + 44x - 48$$

VII. TRINOMIO AL CUBO

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z)$$

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y+z)(xy+xz+yz) - 3xyz$$

Ejemplo: Si se verifica que:

$$a+b=1, \quad b+c=4, \quad a+c=3$$

Calcular: $a^3+b^3+c^3$

Resolución

$$\left. \begin{array}{l} a+b = 1 \\ b+c = 4 \\ a+c = 3 \end{array} \right\} \quad a+b+c = 4 \quad y$$

$$(a+b)(b+c)(a+c) = 12$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

$$4^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(12)$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 28$$

CONSTRUYENDO**MIS CONOCIMIENTOS**

1. Reducir:

$$A = (1+a)(1-a)(1+a^2) - 1$$

Resolución :

$$\text{Rpta. } A = -a^4$$

2. Simplificar :

$$B = \frac{(2a+3b)^2 + (2a-3b)^2}{4a^2 + 9b^2}$$

Resolución :

$$\text{Rpta. } B = 2$$

3. Reducir :

$$C = \sqrt{(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

Resolución :

$$\text{Rpta. } c = 1$$

1. Simplificar :

$$D = \frac{x^2 + 4xy + 4y^2 - 4}{x + 2y - 2}$$

Resolución:

$$\text{Rpta. } D = x + 2y + 2$$

5. Efectuar :

$$E = 2\{[x+y]^2[x-y]^2\} - 4x^2$$

Resolución:

$$\text{Rpta. } E = 4y^2$$

6. Simplificar:

$$F = \sqrt{(1+a)(1-a)(1+a^2)(1+a^4)} - 1 + a^8$$

Resolución :

$$\text{Rpta. } F = -0$$

**REFORZANDO
MIS CAPACIDADES**

1. Simplificar : $A = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{x-y}$

- a) $x + y$ b) $x - y$ c) x
d) y e) $2x + y$

2. Efectuar :

$$B = (a-1)(a^2 + a + 1) (a+1) (a^2 - a + 1)$$

- a) a b) $a^3 - 1$ c) $a^3 + 1$
d) $a^6 - 1$ e) $a^6 + 1$

3. Simplificar :

$$C = (a+b)(a-b) (a^2 + b^2) (a^4 + b^4) + b^8$$

- a) $a^2 - b^2$ b) $a^2 + b^2$ c) a^8
d) b^8 e) b^{16}

4. Reducir:

$$D = (\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1)$$

- a) 4 b) 3 c) 8 d) -8 e) -4

5. Simplificar:

$$E = (\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{4})$$

- a) 10 b) 1 c) 2 d) 9 e) 8

6. Reducir:

$$F = \frac{(a+b)^3 + (a-b)^3}{(a^2 + 3b^2)}$$

- a) 2 b) 2a c) -2a d) a e) ab

7. Reducir :

$$G = \frac{(a+b)^3}{(b^2+3a^2)}$$

- a) 2 b) 2b c) -2b
d) b e) ab

8. Simplificar:

$$H = (a^7 + 6)(a^7 + 3) - (a^7 + 5)(a^7 + 4)$$

- a) 20 b) 18 c) -2 d) -18 e) 2

9. Simplificar :

$$I = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{x^2+y^2}$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) x e) y

9. Simplificar :

$$J = \frac{(c-d)(a+b)}{2a^2+4ab+2b^2}$$

- a) $\frac{c-d}{a+b}$ b) $\frac{2(c-d)}{a+b}$
c) $\frac{2(c-d)}{a-b}$ d) $\frac{c-d}{2(a+b)}$