



POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

POTENCIACIÓN

La potenciación con exponente natural es la operación que asocia cada par ordenado de la forma $(a ; n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N}$, un número racional $a^n = b$, donde $(a ; n) \neq (0 ; 0)$

Potenciación: $\mathbb{Q} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$

Simbólicamente:

$$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, b \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos:

$$* \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$$

$$* \left(\frac{-3}{5}\right)^3 = \frac{-3}{5} \times \frac{-3}{5} \times \frac{-3}{5} = \frac{-27}{125}$$

$$* \left(\frac{-2}{3}\right)^4 = \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} = \frac{16}{81}$$

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

- **Producto de potencias de igual base:**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{-3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{-3}{4}\right)^3 = \left(\frac{-3}{4}\right)^{2+3} = \left(\frac{-3}{4}\right)^5$$

- **Potencia de la potencia**

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$$

Ejemplo:

$$\left[\left(\frac{3}{9}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{3}{9}\right)^{2 \cdot 3} = \left(\frac{3}{9}\right)^6 = \frac{3^6}{9^6}$$

- **Potencia de un producto**

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{-4}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-4}{5}\right)^2 = \frac{2^2 \cdot (-4)^2}{3^2 \cdot 5^2}$$

- **Potencia de un cociente**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo: $\left(\frac{-3}{4}\right)^3 = \frac{-3^3}{4^3} = \frac{-27}{64}$

- **Cociente de potencias de igual base**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$

Ejemplo:

$$\left(\frac{-3}{2}\right)^5 : \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \left(\frac{-3}{2}\right)^{5-2} = \left(\frac{-3}{2}\right)^3$$

- **Potencia de exponente 1**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$$

Ejemplo: $\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4}$

- **Potencia de exponente cero (0)**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

Ejemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

- **Potencia de exponente negativo.**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Ejemplo: $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

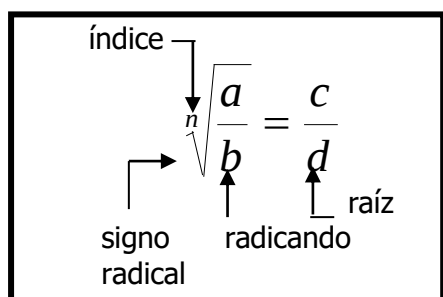
RADICACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES

La Radicación: Es la operación que asocia al par ordenado $(b;n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{N}^*$, un número racional $\sqrt[n]{b} = a$ (si existe), llamado raíz enésima de b.

Ejemplo: $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$, porque

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

Simbólicamente: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \left(\frac{c}{d}\right)^n = \frac{a}{b}$



Ejemplos:

$$* \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2}$$

$$* \sqrt[3]{\frac{-27}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{-3}{10}$$

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

Producto de raíces de igual índice

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \times \sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a \cdot c}{b \cdot d}}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\frac{-2}{5}} \times \sqrt[3]{\frac{32}{25}} = \sqrt[3]{\frac{(-2) \cdot 32}{5 \cdot 25}} = \sqrt[3]{\frac{-64}{125}} = \frac{-4}{5}$$

Raíz de una raíz

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[m.n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{64}}} = \sqrt[3.2]{\frac{1}{64}} = \sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$

Raíz de una potencia

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^m = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$$

Ejemplo: $\left(\sqrt[4]{\frac{9}{25}}\right)^2 = \sqrt[4]{\left(\frac{9}{25}\right)^2} = \sqrt[4]{\frac{81}{625}} = \frac{3}{5}$

Exponente fraccionario

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{12}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12/3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{(3)^6} = 3^{6/3} = 3^2 = 9$$

Simplificación de radicales

Se realiza descomponiendo el radicando en sus factores primos, agrupando los factores iguales según el índice de la raíz y aplicando las propiedades.

Ejemplo:

a) Simplificar : $\sqrt{144}$

Resolución:

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{144} &= \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} \\ &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

b) $\sqrt{\frac{63}{180}}$

Resolución:

$$\begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{63}{180}} &= \frac{\sqrt{3^2 \cdot 7}}{\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5}} \\ &= \frac{\cancel{3} \cdot \sqrt{7}}{2 \cancel{3} \sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

OPERACIONES COMBINADAS EN Q.

Primero se resuelven las raíces y potencias, luego los productos y cocientes, y por último las sumas y las restas.

Ejemplo:

a) Efectuar: $P = \frac{\sqrt{\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)} \cdot 35}{\left(3 + \frac{1}{2}\right) \left(3 - \frac{1}{2}\right)}$

Resolución:

Hallando el valor que encierra cada paréntesis.

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1.4 + 1.3 - 1.2}{12} = \frac{5}{12}$$

$$\left(3 + \frac{1}{2}\right) \left(3 - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{35}{4}$$

Reemplazando los valores

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)} \cdot 35}{\frac{35}{4}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}} \cdot 35 \cdot 4}{35} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Efectuar } Q &= \left(\frac{\sqrt[6]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}}}{1 - \frac{1}{2}} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{\sqrt[6]{\frac{1}{64}}}{\frac{1}{2}} \right)^2 = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right)^2 = 1^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot (\sqrt[5]{-32})^{-1}}{10^{-2} \cdot \sqrt{81}} &= \frac{9 \cdot (2)^2 \cdot (-2)^{-1}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot 9} \\ &= \frac{9 \cdot 4 \cdot -\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{100} \cdot 9} \\ &= \frac{-18}{\frac{9}{100}} \\ &= \frac{1800}{9} = -200 \end{aligned}$$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Efectúa las siguientes potenciaciones:

$$\text{a) } \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} =$$

$$\text{b) } \left(\frac{-8}{4}\right)^{-3} =$$

$$\text{c) } \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} =$$

$$\text{d) } \left(-\frac{3}{2}\right)^{-4} =$$

$$\text{e) } \left(2\frac{1}{3}\right)^3 =$$

2. Efectúa las siguientes radicaciones:

a) $\sqrt{\frac{25}{4}} =$

b) $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} =$

c) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} =$

d) $\sqrt{5\frac{4}{9}} =$

e) $\sqrt[3]{\frac{27}{1000}} =$

3. Resuelve las operaciones aplicando propiedades de potenciación:

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}$

b) $\left\{ \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{12} \right]^0 \right\}^5 + \left\{ \left[\left(\frac{1}{4} \right)^{-2} \right]^2 \right\}^2$

c) $\left[3^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{-2} \cdot (\sqrt[5]{-32})^{-1} \right]$

d) $\left\{ \left[\left(\frac{1}{4} \right)^{20} \right]^0 \right\}^6 + \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{-3} \right]^2 \right\}^0$

4. Efectúa las operaciones aplicando las propiedades de potenciación y radicación:

a) $-\left(\sqrt[5]{\left(\frac{12}{5} \right)^2} \right)^5 =$

b) $-\left[\left(\sqrt[4]{\frac{7}{9}} \right)^2 \right]^{-2} =$

c) $\sqrt[3]{5\sqrt{\left(\frac{8}{7}\right)^{18} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^3}} =$

d) $\sqrt[4]{3\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^{15} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^9}} =$

5. Reduce los radicales semejantes:

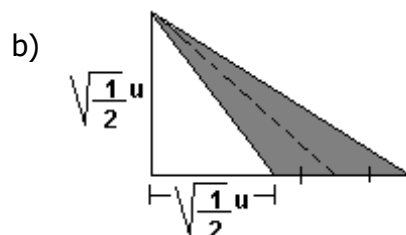
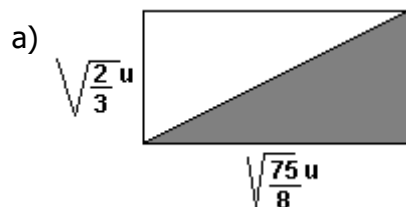
a) $2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 9\sqrt{5} =$

b) $14\sqrt{3} - 7\sqrt{12} + 3\sqrt{3} =$

c) $\sqrt{90} - \sqrt{10} + \sqrt{160} =$

d) $2\sqrt{x} + 5\sqrt{x} =$

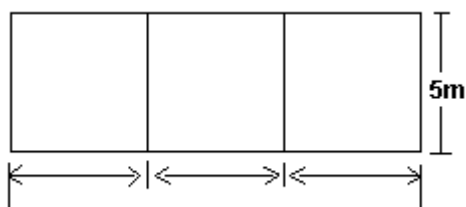
6. Halla el área sombreada:



7. Richard divide en partes iguales un terreno de 410 m², como se muestra en la figura, entre sus tres hijos

a) ¿Cuál es el ancho y largo de cada terreno?

b) ¿Cuál es el perímetro y el área del terreno de cada uno de los hijos?



1. La suma de los cubos de dos fracciones es 35/216. Si una equivale a 1/2 ¿Cuál es la otra?

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1. Efectúa las siguientes potenciaciones:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} =$

b) $\left(-\frac{3}{8}\right)^{-2} =$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} =$

d) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4} =$

e) $\left(2\frac{3}{5}\right)^{-2} =$

2. Efectúa los siguientes radicales:

a) $\sqrt{\frac{16}{9}} =$

b) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} =$

c) $\sqrt[3]{\frac{216}{64}} =$

d) $\sqrt[4]{\frac{81}{1296}} =$

e) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}} =$

3. Resuelve las operaciones aplicando propiedades de potenciación:

a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

b) $\left\{ \left[\left(\frac{3}{5} \right)^{10} \right]^5 \right\}^0 + \left\{ \left[\left(\frac{1}{5} \right)^{-2} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$

$$c) \left[4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^{-3} \right] =$$

$$d) \left\{ \left[\left(\frac{1}{5}\right)^{15} \right]^0 \right\}^7 + \left\{ \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \right]^2 \right\}^0$$

4. Efectúa las operaciones aplicando las propiedades de radicación:

$$a) \sqrt[3]{\frac{27}{8} \cdot \frac{1}{125}} =$$

$$b) \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{6}\right)^{36}}}} =$$

$$c) \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\left(\frac{4}{9}\right)^6}}} =$$

$$d) \frac{\sqrt{\frac{-1}{10} + \frac{-1}{17}}}{\frac{1}{6} - \frac{1}{2}} =$$

5. Reduce los radicales semejantes:

$$a) 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} + 4\sqrt{2}$$

$$b) 2\sqrt{m} + 8\sqrt{m} - \sqrt{m} + 3\sqrt{m}$$

$$c) 3\sqrt{12} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

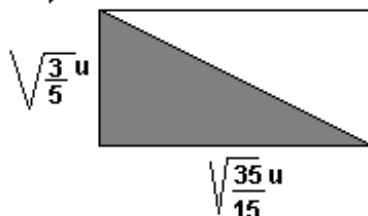
$$d) \sqrt{32} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$$

6. Halla el área sombreada de:

a)



b)



1. Resuelve las operaciones combinadas:

a) $\frac{7}{8} \cdot \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2} \right) + \frac{4}{11} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$

b) $\frac{4}{9} - \left(\frac{-3}{4} - \frac{1}{4} \right) + \frac{10}{3} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{5} \right)$

c) $\frac{\sqrt{81} \cdot \left(\frac{-2}{5} \right) (-25)}{(-10)(-3)}$

d) $\sqrt{\frac{5}{4} \left(\frac{7}{10} - \frac{1}{2} \right)}$

8. Un saco de camotes cuesta $S/20$; uno de tomates; $S/16$ y uno de cebollas, $S/12$. Una señora compra $\frac{3}{4}$ de saco de camotes, $\frac{1}{2}$ saco de tomates y $\frac{1}{4}$ de saco de cebollas ¿Cuánto gastó en total?

- a) $S/20$
- b) $S/25$
- c) $S/26$
- d) $S/27$