



PIRÁMIDES

Pirámide es el poliedro cuya base es un polígono cualquier y cuyas caras laterales son triángulos que tienen un vértice común. Este vértice común es el vértice de la pirámide.

Pirámide regular es la pirámide cuya base es un polígono regular y cuyas caras laterales son triángulos isósceles congruentes.

✚ Área lateral y área total de la pirámide

El área lateral de una pirámide regular es igual al semiproducto del perímetro de su base por la apotema de la pirámide.

$$A_L = \frac{p \cdot Ap}{2}$$

El área total de una pirámide regular es igual al área lateral más el área de la base.

$$A_T = \frac{p \cdot AP}{2} + B \rightarrow A_T = A_L + B$$

✚ Volumen de una pirámide

El volumen de una pirámide es igual a un tercio de la base por la altura.

$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

Teorema de Pitágoras en el espacio

✚ Diagonal del ortoedro y del cubo

La longitud de la diagonal (D) de un ortoedro se puede calcular generalizando el teorema de Pitágoras a triángulos rectángulos situados en el plano.

En el triángulo rectángulo OHF, se obtiene $OH^2 = OF^2 + FH^2$ (1)

Por otra parte, en el triángulo rectángulo OEF: $OF^2 = OE^2 + EF^2$ (2)

Reemplazamos (2) en (1). Por lo tanto:

$$\text{Si, } OH^2 = OF^2 + FH^2 \Rightarrow OH^2 = OE^2 + EF^2 + FH^2 \text{ (3)}$$

Llamando a, b y c a las tres dimensiones del ortoedro (largo, ancho y alto), tenemos: $OH = D$, $EF = a$, $OE = b$, $FH = c$

$$\text{Reemplazando en (3): } D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

En el cubo las tres dimensiones son iguales, por ello:

$$D^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow D = \sqrt{3a^2}, \text{ o bien } D = a\sqrt{3}$$

Ejemplos:

1. Si $a = 6\text{ cm}$, $b = 4\text{ cm}$ y $c = 3\text{ cm}$, entonces:

$$D = \sqrt{6^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{61} = 7,8\text{ cm}$$

2. Si $a = 6\text{ cm}$ en el cubo, entonces $D = 6\sqrt{3} \cong 6.1,73 \cong 10,38\text{ cm}$

El teorema de Pitágoras permite también relacionar la altura de la pirámide con el lado de la base, con la arista y con la apotema de la pirámide.

Resolución de Problemas

1. Si la altura de una pirámide es 4 cm y su base es un triángulo equilátero de lado 6 cm , halla su volumen.

Resolución:

- Hallamos el área de la base. Usamos la fórmula de A_{Δ} equilátero en función del lado:

$$A_{\Delta} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

- Calculamos el volumen:

$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{9\sqrt{3} \cdot 4}{3} = 12\sqrt{3}$$

El volumen mide $12\sqrt{3}\text{ cm}^3$

2. En una pirámide de base cuadrada, la arista de la base mide 12 cm y la altura 16 cm . ¿Cuál es el área lateral de la pirámide?

Resolución:

- Trazamos en la pirámide el triángulo rectángulo PQR y calculamos la apotema (hipotenusa) utilizando Pitágoras.

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

$$ap^2 = 16^2 + 6^2$$

$$ap^2 = 256 + 36$$

$$ap = \sqrt{292} = 2\sqrt{73}$$

- Hallamos perímetro: $p = 4 \cdot 12 = 48$

- Calculamos el área lateral: $A_L = \frac{p \cdot ap}{2} \rightarrow \frac{48 \cdot 2\sqrt{73}}{2} = 48\sqrt{73}$

El área lateral mide $48\sqrt{73} \cong 410\text{ cm}^2$

3. La altura de una pirámide regular de base hexagonal mide 12 cm y la arista de la base 6 cm . ¿Cuál es el área total de la pirámide?

Resolución:

- Hallamos el perímetro y el área de la base:

$$p = 6 \cdot l = 6(6) = 36$$

$$B_0 = \frac{\cancel{6}l^2\sqrt{3}}{\cancel{4}} = \frac{3 \cdot 6^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$= 54 (1,73) \cong 93,42 \text{ cm}^2$$

- Para hallar la apotema de la pirámide, primero calculamos su arista (a) que es a la vez, la hipotenusa del ΔPQR , recto en Q, entonces por Pitágoras:

$$a^2 = 10^2 + 6^2$$

$$a = \sqrt{100 + 36}$$

$$a = \sqrt{136}$$

- Calculamos la apotema de la pirámide que es el cateto PS del ΔPSR , recto en S:

$$ap^2 = PR^2 - RS^2 = (\sqrt{136})^2 - 3^2$$

$$ap = \sqrt{136} - 9 \rightarrow ap = \sqrt{127}$$

- Calculamos el área lateral de la pirámide:

$$A_L = \frac{p \cdot ap}{2} \rightarrow A_L = \frac{36 \cdot \sqrt{127}}{2}$$

- Calculamos el área total: $A_T = A_L + B = 202,86 + 93,42 \cong 296,28$

El área total de la pirámide es de 296, 28 cm^2

4. Halla el volumen del cubo, si la diagonal de una cara mide $5\sqrt{2}$ cm

Resolución:

- Por Pitágoras calculamos:

$$a^2 + a^2 = (5\sqrt{2})^2 \rightarrow 2a^2 = 25(2) \rightarrow$$

$$a^2 = 25 \rightarrow a = \sqrt{25} \rightarrow a = 5$$

- Calculamos el volumen del cubo: $V = a^3 = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Completa las proposiciones:

- a) En una pirámide regular su base es un polígono.....
- b) El área lateral de una pirámide regular es igual al semiproducto del de su base por la de la pirámide.

2. Grafica e identifica el número de vértices de una pirámide cuadrangular.
3. Calcula el área total de una pirámide que tiene por base un cuadrado de 6cm de lado y como altura la diagonal de dicho cuadrado.
4. Halla el área lateral y total de una pirámide regular de base triangular sabiendo que el lado de la base mide 6cm y la altura de la pirámide 12 cm
Rpta: $A_L = 9\sqrt{147}$ cm²
 $A_T = 9(\sqrt{3} + \sqrt{147})$ cm²
5. Halla la diagonal de un cubo cuya arista mide 3 cm.
Rpta. $3\sqrt{3}$ cm
6. La diagonal de un cubo mide $2\sqrt{3}$ cm. Hallar la arista
Rpta. 2 cm
7. Dada una pirámide de base cuadrada de 8 cm de lado y 12 cm de altura, hallar la apotema de la base y la apotema de la pirámide.
Rpta. 4cm y $4\sqrt{10}$ cm
8. En una pirámide cuadrangular regular, su arista básica mide 4 cm y su apotema 6cm. Calcular el área total de la pirámide.
Rpta. 114cm²

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Completa las proposiciones:
 - a) El área total de una pirámide regular es igual al más el área de la
 - b) El volumen de la pirámide es igual a un de la base por la
2. Grafica y determina el número de aristas de una pirámide cuadrangular.
3. En una pirámide cuadrangular regular, su apotema mide 8cm y su área lateral es 96 cm². Calcular el área de su base.
Rpta: 36m²
4. Calcular el volumen de una pirámide cuadrangular regular si sus aristas laterales miden 5cm y su altura mide 4cm.
5. Hallar el área lateral de una pirámide de base cuadrada si el lado de la base mide 6cm y la altura 4 cm.
Rpta: $A_L = 60$ cm²
6. Hallar el área total de una pirámide regular de base hexagonal sabiendo que el lado de la base mide 5cm y la apotema de la pirámide mide 4,4 cm.
Rpta: 130,9 cm²
7. En una pirámide triangular la base tiene por lado 12m, 12m y 12m y su apotema la cuarta parte del perímetro de la base. El área lateral de la pirámide es:
 - a) 64 m²
 - b) 162 m²
 - c) 170 m²

GEOMETRIA

- d) 150 m^2 e) 180 m^2
8. Una pirámide cuya altura mide 12 cm , tiene por base un rombo tal que una de las diagonales es $\frac{3}{4}$ de la otra. El volumen es 96 cm^3 . Calcular las longitudes de las diagonales.
- a) 8 cm y 9 cm b) 6 cm y 8 cm
c) 3 cm y 4 cm d) 9 cm y 12 cm
a) 4 cm y 55 cm