ARITMETICA

NÚMERO COMBINATORIO Y BINOMIO DE NEWTON

NÚMERO COMBINATORIO

Conocidos también como el número de combinaciones de n elementos tomados de k en k o de orden k. Se definen y simbolizan también como:

$$C_{n;k} = C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

EJEMPLO 1 **Calcula el siguiente número combinatorio**

$$\binom{10}{8} = \frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!(2)!} = \mathbf{45}$$

PROPIEDADES

- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

EJEMPLO 2 **Calcula los siguientes números combinatorios aplicando propiedades**

- $\binom{12}{9} = \frac{12!}{9!(12-9)!} = \frac{12 \times 11 \times 10}{(3)!} = \mathbf{220}$
- $\binom{5}{5} = 1$
- $\binom{8}{1} = 8$
- $\binom{11}{0} = 1$
- $\binom{9}{\ } = \binom{9}{\ }$

6 3

- $\binom{7}{2} + \binom{7}{3} = \binom{8}{3}$

POTENCIAS DE UN BINOMIO TRIANGULO DE PASCAL

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

EJEMPLO 3:
hallar los desarrollos de:

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a\,b^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

BINOMIO DE NEWTON

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^4 + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

OBSERVAMOS QUE:

1. El nº de términos del desarrollo de un binomio de potencia n es (n+1)
2. El grado de cada monomio es completo y ordenado en a y b, decreciente respecto de a y creciente respecto de b. Además, la suma de los exponentes de a y b es, en cada caso, igual al exponente de la potencia n.
3. Las potencias de $(a-b)^n$ los términos impares son positivos y los pares son negativos.

TÉRMINO DE LUGAR GENERAL (K+1)

$$T_{K+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} . b^{k}$$

CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTOS

1. Aplicando propiedades, halle:

a) $\binom{5}{5}$ b) $\binom{7}{0}$ c) $\binom{12}{1}$

d) $2\binom{6}{6} + 3\binom{6}{0} + 4\binom{6}{1}$

ARITMETICA

2. **Calcular el valor numérico de Q, si:**
   Q = $\binom{8}{7}+\binom{7}{6}+\binom{6}{5}+\binom{5}{4}+\binom{5}{3}$

   a) 9 b) 18 c) 36
   d) 45 e) N.A.

3. **Calcular: $x^2 + y^2$; si** $\binom{5}{x-2}=\binom{x}{y}$

   a) 13 b) 23 c) 29
   d) 39 e) N.A.

4. **Escribir V (verdadero) o F (falso) según corresponda:**

   I. $\binom{9}{2}=\binom{9}{7}$ **( )**

   II. $\binom{7}{4}=\binom{7}{3}$ **( )**

   III. $\binom{10}{6}=\binom{10}{4}$ **( )**

   IV. $\binom{11}{12}=\binom{12}{11}$ **( )**

5. **Utilizando el triangulo de Pascal. Halle los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^4$. Dar como respuesta la suma de estos.**

   a) 14 b) 16 c) 18
   d) 20 e) N.A.

6. **Calcular el sexto término de la potencia $(2x – x^4)^9$**

   a) $-2016x^{20}$ b) $-2016x^{26}$
   c) $-2016x^{22}$ d) $-2016x^{28}$ e) N.A.

REFORZANDO
MIS CAPACIDADES

1. **Escribe verdadero (V) o falso (F)**

   I. $\binom{n}{1}+\binom{n}{0}=\binom{n+1}{1}$ **( )**

   II. $\binom{15}{8}+\binom{15}{9}=\binom{16}{9}$ **( )**

   III. $\binom{20}{19}-\binom{16}{15}=\binom{4}{4}$ **( )**

   a) VVV b) VVF c) VFF
   d) FVV e) N.A.

ARITMETICA

2. **Calcula:** $\binom{10}{9} \cdot \binom{21}{20} \cdot \binom{60}{0}$

a) 200 b) 210 c) 220
d) 230 e) N.A.

3. **Al efectuar** $\binom{29}{28} - \binom{101}{99} + \binom{52}{50}$
Se obtiene
a) -3695 b) -3694 c) -3693
d) -3692 e) N.A.

4. **Hallar x en:** $\binom{7}{x} = \binom{7}{3}$

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) N.A.

5. **El valor de $x^2 – y^2$ en** $\binom{x}{y} = \binom{5}{x-3}$
Es:

a) 4 b) 8 c) 16
d) 20 e) N.A.

6. **Expresa en función de números combinatorios $(x^3 - 3)8$**
7. **Escribe los 4 primeros términos del desarrollo ordenado del binomio $(2x^4 + \frac{1}{3})^4$**
8. **El quinto término del desarrollo de $(4x + 2)^7$; es:**

a) $35\ 840x^3$
b) $35\ 820x^3$
c) $35\ 800x^3$
d) $35\ 802x^3$
e) N.A.

9. **El término central de** $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^8$ **es:**

a) 1 b) x^4 c) $\frac{1}{x^4}$
d) 70 e) N.A.

10. **Halla la suma de los coeficientes del desarrollo del binomio $(x^4 + 2)^6$**

a) 729 b) 629 c) 529
d) 429 e) N.A.

ARITMETICA

PROBABILIDADES

Las probabilidades la relacionamos con los juegos de azar, las corridas de caballos, la polla en el fútbol, las carreras de autos, etc. Lo que sucede es que las probabilidades nacieron en el juego.

Durante el renacimiento en el siglo XVI, Luca Pacioli, Jerónimo Cardano y NicoloTartaglia, fueron los primeros matemáticos quienes tuvieron consideraciones formales a raíz de los juegos de azar y la s apuestas.

En 1654, el matemático francés Blaise pascal hacía un viaje acompañando a El Caballero de Meré (un jugador semi- profesional en las apuestas) quien le propuso un problema a Pascal: "Dos jugadores, Antonio y Bernardo, ponen sobre la mesa 10 000 monedas de la misma denominación cada uno. Un árbitro va a tirar un dado varias veces seguidas. Cada jugador elegirá un número entre el 1 y el 6. Antonio elige el 5 y Bernardo el 3. Se llevará las 20 000 monedas aquel cuyo número salga primero 3 veces. Resulta que luego de unas cuantas tiradas el 5 a salido 2 veces y el 3 solo una. En eso Bernardo recibe un mensaje que debe abandonar el juego"

¿Cómo repartir de modo justo y equitativo las 20 000 monedas de la misma denominación?

Pascal después de compartir opiniones con su matemático amigo Fermat y otros dieron con la misma solución al problema: La Teoría de las Probabilidades había nacido.

Partiremos de lo siguiente:

EJEMPLO 1

Enrique piensa: "***si gasto mi dinero para comprar una rifa tengo alguna posibilidad para triplicar el dinero que tengo, en cambio, si no gasto nada tengo la seguridad de no perder mi dinero***". **¿Cuántos sucesos puedes identificar?**

- Algunos sucesos o fenómenos se pueden predecir con certeza, otros no, pero sí se pueden establecer las posibilidades de cada resultado, a partir del estudio de su probabilidad.

EJEMPLO 2

Tenemos los siguientes casos:

- Esteban presenta dolor de cabeza, fiebre y nariz congestionada; ***es probable que tenga bronquitis.***
- Sino estudio lo necesario, ***es probable que salga desaprobado.***
- El cielo está nublado, ***es probable que llueva.***
- el automóvil está estacionado en una zona restringida, ***es posible que nos multen.***

NOCIONES BÁSICAS

EXPERIMENTO ALEATORIO (ε)

Consiste en la ejecución de un acto o prueba una o más veces, cuyo resultado en cada prueba depende del azar y, en consecuencia, no se puede predecir con certeza.

EJEMPLO 2

Veamos los siguientes experimentos aleatorios

- ε_1 = lanzar un dado y observar su resultado.
- ε_2 = lanzar una moneda 3 veces y anotar su resultado.

ESPACIO MUESTRAL (Ω)

Es el conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

EJEMPLO 2

Veamos el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios

- ε_1 = lanzar un dado y observar su resultado.
- $\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- ε_2 = lanzar una moneda 3 veces y anotar su resultado.
- $\Omega_2 = \{ccc; ccs; csc; css; scc; scs; ssc; sss\}$

SUCESO O EVENTO (A)

Es un subconjunto de un espacio muestral, podemos distinguir los siguientes tipos:

- **El evento imposible (ϕ):**

Es aquel evento que no tiene puntos muestrales

- **Los eventos unitarios o elementales:**

Contienen un solo punto muestral.

- **Los eventos compuestos:**

Consisten en dos o más eventos.

- **El evento seguro:**

Es aquel subconjunto que contiene todos los eventos elementales.

EJEMPLO 3

Veamos el siguiente evento

- **ε =** lanzar una moneda tres veces y anotar su resultado.
- **Ω =** {ccc; ccs; csc; css; scc; scs; ssc; sss}
- $\mathbf{A_1}$ = { }
- $\mathbf{A_2}$ = {ccc}
- $\mathbf{A_3}$ = {ccc; csc}
- Así sucesivamente.

PROBABILIDAD

Es la posibilidad de que algo pase

- Esteban presenta dolor de cabeza, fiebre y nariz congestionada; ***es probable que tenga bronquitis.***
- Sino estudio lo necesario, ***es probable que salga desaprobado.***
- El cielo está nublado, ***es probable que llueva.***

PROBABILIDAD

Es la posibilidad de que algo pase

EJEMPLO 4

Partiremos de los siguientes fenómenos casuales (experimentos aleatorios)

- Se realiza una rifa en el colegio todos queremos ganar el premio mayor pero solo uno saldrá sorteado como ganador ¿quién será el suertudo?. Nadie sabe.
- Dos amigos escogen entre dos películas para ver, la decisión se tomará tirando una moneda al aire escogiendo entre cara y sello.
- En el aula se elegirá a la delegada para el presente año escolar, hay 5 candidatas propuestas ¿a quién elegiremos este año?
- ***Con el cine el lanzamiento de las monedas decidirá la elección de cualquiera de las dos películas, en la rifa todos tenemos las mismas posibilidades de ganar siempre y cuanto tengamos nuestro boleto y a más boletos adquiridos hay más posibilidades. Con las candidatas a ser la delegada del aula todas tienen las mismas posibilidades. Entonces los resultados de un suceso con iguales posibilidades de ocurrir se dice entonces que son IGUALMENTE PROBABLES.***

PROBABILIDAD CLÁSICA

Tenemos un experimento aleatorio **ε,** un suceso **A** puede ocurrir de **m** formas de entre **n** resultados igualmente posibles de un espacio muestral **S,** la ***probabilidad apriori*** de dicho suceso **A** está determinada por:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m: número de casos favorables del evento

n: número total de casos posibles a ocu

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

ARITMETICA

EJEMPLO 5

¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 3 al lanzar un dado no cargado?

- **ε =** lanzar un dado y obtener un número mayor que 3
- **Ω =** {1; 2; 3; 4; 5; 6}, entonces **n** = 6
- **A =** {4; 5; 6}, entonces **m** = 3
- Como es uAn dado no cargado todos las caras tienen las mismas posibilidades
- **Finalmente:**

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

- La posibilidad de obtener un número mayor que 3 es un medio.
- **Para tener en cuenta:**

Si un suceso no puede ocurrir, su posibilidad es igual a 0.
Si va a ocurrir con toda certeza, su probabilidad es 1.

PROBABILIDAD Y FRECUENCIA

Si realizamos un experimento un gran número de veces y contamos las veces que ocurrió el proceso **A (frecuencia relativa)**, entonces la probabilidad de dicho suceso se estima de la siguiente forma:

$$P(A) = \frac{\text{nº de veces que ocurrió A}}{\text{nº de veces que se repite el experimento}}$$

EJEMPLO 6

¿Cuál es la probabilidad que un discman se malogre durante los primeros 2 años de uso?

- Sólo hay dos resultados: *que se descomponga o que no se descomponga.*
- Las posibilidades son desiguales puesto que cuanto más nuevo es el discman, es menor la posibilidad de que se malogre.
- Si sobre 3 000 dueños de discman de una determinada marca solo 278 reportaron algún tipo de desperfecto durante los 2 primeros años de uso, calcularemos la probabilidad que se malogre un discman:

$$P(A) = \frac{278}{3\,000} = 0{,}093 \cong 0{,}1$$

- La frecuencia relativa es 0,093 aproximadamente 0,1 es decir las posibilidad de que se malogre es aproximadamente de 1 de cada 10 discman.
- **Para tener en cuenta:**

Con la frecuencia relativa tenemos una aproximación de la probabilidad.
Si aumenta el número total de observaciones, se tiende a la probabilidad real.
A esto se le llama PROBABILIDAD APOSTERIORI ya que repitiendo el mismo experimento una cantidad elevada de veces podemos saber cual es la probabilidad de cada suceso.

PROBABILIDAD DE UN SUCESO

- **LEY DE LAPLACE**

Si los sucesos elementales del espacio muestral son equiprobables, la probabilidad de un suceso A, denotado P(A), es el cociente entre la cantidad de casos favorables de que ocurra el suceso A y la cantidad de casos posibles:

$$P(A) = \frac{\text{cantidad de casos favorables}}{\text{cantidad de casos posibles}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

REGLA DE LA SUMA

Si A y B son eventos de un espacio muestral y no son mutuamente excluyentes, entonces:

P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B)

EJEMPLO 7

Si lanzamos un dado ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número par y un número primo menor que 3?

- **El espacio muestral es:**
  Ω = {1; 2; 3; 4; 5; 6}
- **El evento A de obtener un número par, es:**
  A = {2; 4; 6}; entonces: **P(A)** = 3/6
- **El evento B de obtener un número primo menor que 3, es:**
  B = {1; 2}; entonces: **P(B)** = 2/6
- Los eventos **A** y **B** tiene en común el resultado **2 (un solo número);** el cual representa a:
  P(A∩B) = 1/6
- Aplicaremos ***la regla de la suma***
  P(A∪B) = P(A) + P(B) – P(A∩B)
  P(A∪B) = 3/6 + 2/6 – 1/6
  P(A∩B) = 4/6 = 2/3
- La probabilidad de obtener un número par y un número primo menor que 3 es 2/3; que quiere decir 2 posibilidades de cada 3 tiros.

REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN

Si A y B son eventos independientes, es decir la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia de otro y viceversa, entonces si se busca hallar la probabilidad de que sucedan dichos eventos al mismo tiempo, tenemos:

P(A∩B) = P(A). P(B)

EJEMPLO 8

Si lanzan una moneda y un dado ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número cara y 6?

- **El espacio muestral es:**
  Ω = {(c;1), (c;2), (c;3), (c;4), (c;5), (c;6), (s;1), (s;2), (s;3), (s;4), (s;5), (s;6)}
- **El evento A de obtener cara, es:**
  A = {(c;1), (c;2), (c;3), (c;4), (c;5), **(c;6)**} entonces: **P(A)** = 6/12
- **El evento B de obtener un número 6, es:**
  B = {**(c;6)**, (s;6)}; entonces: **P(B)** = 2/12
- Los eventos **A** y **B** no son excluyentes pues ambos tienen en común el resultado **(c;6):**
  P(A∩B) = P(A). P(B)
  P(A∩B) = P(c; 6) = (6/12).(2/12) = **1/12**
- La probabilidad de obtener (c, 6) es de 1 en 12

CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTOS

1. Se lanza un dado ¿Cuál es la probabilidad de obtener un puntaje impar?

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{4}{5}$

d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{3}$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos monedas se obtenga en ambas sello?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{5}{6}$

3. Se lanzan dos dados, uno blanco y el otro azul ¿Cuál es la probabilidad de obtener 7 puntos en total?

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{8}$

d) $\frac{3}{7}$ e) $\frac{1}{12}$

4. Se lanzan 2 tetraedros numerados del 1 al 4. Calcular la probabilidad de que la suma de los números de la base sea 4.

a) $\frac{1}{16}$ b) $\frac{2}{16}$ c) $\frac{3}{16}$

d) $\frac{4}{16}$ e) N.A.

5. Se extraen dos cartas de una baraja de 52, en forma sucesiva y con reposición. Calcular la probabilidad de que ambas cartas sean de corazones.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{16}$ e) N.A.

6. Se extraen dos cartas de una baraja de 52 en forma sucesiva y sin reposición. Calcular la probabilidad de que ambas cartas sean de corazones.

a) $\frac{1}{14}$ b) $\frac{1}{15}$ c) $\frac{1}{16}$

d) $\frac{1}{17}$ e) N.A.

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1. Se lanzan dos tetraedros con caras numeradas del 1 al 4, determinar el espacio muestral. Dar como respuesta la cantidad de pares ordenados obtenidos.

a) 14 b) 16 c) 18

d) 20 e) N.A.

ARITMETICA

2. **Del ejercicio anterior, determinar por cuántos pares ordenados está conformado el suceso si sabemos que la suma de las caras inferiores es un número par.**
   a) 6 b) 7 c) 8
   d) 9 e) N.A.

3. **Lanzamos al aire una moneda tres veces consecutivas anotando los resultados. Determinar su espacio muestral**

   a) {ccc, sss, csc, scs}
   b) {ccc, csc, css, ssc, scs}
   c) {ccc, ccs, csc, ccs, scc, scs, ssc, sss}
   d) {ccs, csc, css, scc, scs, ssc, sss}
   e) N.A.
4. **Se lanza un dado. Calcular la probabilidad de que salga un número par o primo.**

   a) $\frac{3}{6}$ b) $\frac{4}{6}$ c) $\frac{5}{6}$
   d) $\frac{6}{6}$ e) N.A.
5. **Se lanza un dado y después una moneda ¿Cuál es la probabilidad de que salga 3 y en la moneda la cara?**

   a) $\frac{1}{11}$ b) $\frac{1}{12}$ c) $\frac{1}{13}$
   d) $\frac{1}{14}$ e) N.A.
6. **Se lanzan 3 monedad y un dado. Calcular la probabilidad de que salgan tres sellos y un número impar.**
   a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$
   d) $\frac{1}{16}$ e) N.A.
7. **Una tómbola contiene 90 bolitas numeradas del 1 al 90. Al extraer una de ellas ¿Cuál es la probabilidad de que al número contenido sea divisible por 6 y por 10?**
   a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{15}$
   d) $\frac{1}{30}$ e) N.A.
8. **Se extraen dos cartas de una baraja de 52 cartas. Si la primera carta extraída se devuelve a la baraja, calcular la probabilidad de que en ambas extracciones hayan salido ases.**
   a) $\frac{1}{13}$ b) $\frac{1}{169}$ c) $\frac{1}{5}$
   d) $\frac{1}{25}$ e) N.A.

9. Una bola se extrae al azar de una caja que contiene 4 bolas blancas, 5 bolas verdes y 2 bolas amarillas. Determinar la probabilidad de que sea verde o amarilla

a) $\frac{2}{11}$ b) $\frac{4}{11}$ c) $\frac{10}{11}$

d) $\frac{7}{11}$ e) $\frac{5}{11}$

10. En una caja hay 15 fichas de las cuales 10 están pintadas de azul y el resto de negro. Una persona extrae dos fichas, una por una. Halle la probabilidad de que ambas sean de color azul.

a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{5}{9}$

d) $\frac{4}{7}$ e) N.A.