LA EXTRAÑA ARITMÉTICA

Aritmética de residuos

¿Qué contador mecánico sabe solo contar hasta 1000?. El contador eléctrico casero. Este cuenta el gasto de energía eléctrica por kilovatios hora (kWh) y si señala la cantidad de 905.73 esto significa que empezando del momento que marcaba 0 ha gastado 905.73 kwh de energía eléctrica. Pasara algún tiempo y el contador marcara 999,99 kwh, pero el contador casero no llegará a indicar 1000 kwh; en vez de 1000 marcará de nuevo 0. Tal es su construcción.

Supongamos ahora que en la ventana del contador aparece el número 016,09 y un mes atrás había el número 880,12. Dejemos aparte las décimas y centésimas de cada cifra y preguntémonos cuánta energía eléctrica se ha gastado en un mes.

Si conocemos la particular construcción del contador eléctrico, podremos hacer este cálculo: 1016 – 880 = 136 (kwh). Sin embargo, el contador no sabe contar más allá de mil; y si nosotros tampoco supiéramos, entonces resultaría una aritmética poco frecuente: 016 – 880 = 136 o 880 + 136 = 16.

Podemos decir, efectivamente, que el contador efectúa la suma (por ejemplo, a 880 añade 136), pero en su ventanita solo indica las tres últimas cifras de la suma (las décimas y las centésimas no las tenemos en cuenta), incluso si la suma es mas de mil. Esto significa que añadiendo la cifra que marcaba el contador el pasado mes, cifra que expresa el gasto de energía eléctrica en el último mes, el contador señala no la suma en si, sino el residuo de la división de esta suma por 1000. si años atrasa, en el momento de poner el contador, este marcaba 000, y ahora indica 016, no podemos establecer cuánta energía ha gastado en todo este tiempo. Solamente podemos decir que ha gastado 16 kwh desde cierto número 1000 kwh pero no cuantos miles.

El contador puede también multiplicar. Supongamos que alguien enciende y apaga la luz cada día a la misma hora, de manera que todos los meses gasta la misma cantidad de energía eléctrica; por ejemplo, 136 kwh. ¿Cuál será el gasto de energía eléctrica en un año?. Evidentemente la respuesta será 136 kwh x12= 1632 kwh. Más el contador nos da otra respuesta, si por ejemplo, al principio del año el contador marcaba 016, al final del año, después de gastar 1632 kwh de energía eléctrica, marcará no 1648, sino 648; de tal modo que el contador solamente ha aumentado en 632. Con el punto de vista del contador la multiplicación se efectúa así:

136 x 12 = 632

He aquí que el contador da no la operación (es decir, 1632), sino solamente el residuo de la división por mil, eso es, el número 632

Así la aritmética del contador es la aritmética de los residuos de la división por mil. En esta aritmética solo hay 999 números enteros y el 0, la suma y el producto jamás rebasan de 999, y en la resta nunca habrá números negativos.

Es interesante conocer esta aritmética, que coge los residuos de la división en cifras menores de 1000. Veamos, por ejemplo, algún mecanismo que calcule así : 0; 1 ; 2; 3; 4; 5; 6 y otra vez 0 (en vez de 7), 1 (en vez de 8), 2(en vez de 9), etc. .., es decir, en vez de cada número el mecanismo señala el residuo de la división de este número por 7.

Esta aritmética llamada aritmética de residuos de la división por 7, tiene, claro esta 7 números, esto es, residuos de la división por 7 en que la operación se efectuó, como se ha dicho antes, por el módulo 7. lo que marca el contador (si quitamos de el las décimas y centésimas) se llama también calculo, es decir, residuos pero ya por el módulo 1000.

OBJETIVOS:

- Encontrar una equivalencia entre multiplicidad y divisibilidad.
- Obtener los múltiplos de un determinado modulo bajo ciertas condiciones.
- Aplicar los principios de divisibilidad en la resolución de problemas.
- Calcular el residuo de una división, sin que se realice la operación.
- Conocer los criterios de divisibilidad en diferentes sistemas de numeración.
- Determinar los restos potenciales con respecto a un modulo.

INTRODUCCION.

La teoría de divisibilidad surge por la necesidad de cómo explicar la división de dos cantidades enteras cuando esta no resulta ser exacta. Un ejemplo podría darse en: Sergio, un jugador frecuente que cuando dispone de dinero juega a los dados, además siempre lo hace de la misma forma gane o pierda: en la primera, apuesta la mitad del dinero que tiene; en la segunda, apuesta la mitad del dinero que le queda, y así sucesivamente cierta tarde tiene S/. 64. si jugo seis veces, donde ganó tres veces y perdió otras tres, ¿podría decirse con cuánto terminaría después de jugar? y así hubiera tenido M monedas de un sol, ¿Qué condiciones debe reunir M para que al final de los juegos se termine con una cantidad entera de soles?
Otro caso en el cual la divisibilidad nos será de gran ayuda es el siguiente:

Supongamos, por ejemplo, que queremos saber que día de la semana fue el 1 de enero del año 2000. Es fácil enterarse, por el almanaque, que el 1 de enero de 1980 fue un día martes. Los veinte años que los esperaban de esta fecha están formados por 20x365+4 (el último de este lapso), es decir, 7304 días, los que componen 1043 semanas completas y 4 días. Al cabo de 1043 semanas, será nuevamente martes y, con los cuatro días más, el 1 de enero del año 2000 fue sábado. Evidentemente, para resolver el problema recién planteado no tiene importancia saber precisamente cuántas semanas completas transcurrieron en 20 años y solo nos interesa la cantidad de días restantes después de estas semanas.

DIVISIBILIDAD

Un número entero A es divisible entre otro número entero positivo B, si al dividir A entre B el cociente es entero y el residuo es igual a cero.
Ejemplos:

- $\begin{array}{r|l} 40 & 8 \\ \hline & 5 \end{array}$ 40 es divisible por 8
- $\begin{array}{r|l} -54 & 9 \\ \hline & -6 \end{array}$ -54 es divisible por 9

MULTIPLICIDAD

Un número entero A es múltiplo de un número entero positivo B, si A es el resultado de multiplicar a B por una cantidad entera.

Ejemplos.

- 40=8(5) — 40 es múltiplo de 8
- -54=9(-6) — -54 es múltiplo de 9

Luego:

- $\underbrace{24 \,\underline{|6}}_{}$ < > $\underbrace{24=6(4)}_{}$

  24 es divisible por 6 < > 24 es múltiplo de 6

De lo anterior:

$$\boxed{\text{Divisibilidad < > multiplicidad}}$$

Generalizando:

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \hline & K \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad A=\underline{B}\,K$$

módulo

Donde:
$A \in Z$; $B \in Z^{+}$; $K \in Z$

Si A es múltiplo de B, entonces su notación será:

$$\boxed{A=mB;\ A=\overset{0}{B};\ A=\overset{0}{B}}$$

Ejemplos:

- $\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \hline & 5 \end{array}$ — 15 es divisible por 3.

  $15=3(5)=\overset{0}{3}$ — 15 es múltiplo de 3.

- $\begin{array}{r|l} 19 & 1 \\ \hline & 19 \end{array}$ — 19 es divisible por 1.

  $19=1(19)=\overset{0}{1}$ — 19 es múltiplo de 1.

- $\begin{array}{r|l} 8 & 8 \\ \hline & 1 \end{array}$ — 8 es divisible por 8.

  $8=8(1)=\overset{0}{8}$ — 8 es múltiplo de 8.

- $\begin{array}{r|l} 0 & 5 \\ \hline & 0 \end{array}$ — 0 es divisible por 5.

  0=5(0) — 0 es múltiplo de 5.

NOTA.

Qué un número entero N sea múltiplo de 12 (N=$\overset{0}{12}$) significa que N resulta de multiplicar a 12 por un número entero.

De los ejemplos podemos dar algunas observaciones.

- Todo numero Z^+ es divisible por si mismo y por la unidad.
- También deducimos que todo numero Z^+ mayor que la unidad admite como mínimo dos divisores (la unidad y el mismo número).
- El cero es múltiplo de todo número Z^+.

Aplicación 1

Determine en forma explicita.

1. Los divisores de 24 y -18 en Z.
2. Los múltiplos de 4 y 12 en Z.

¿Qué se puede observar con respecto de la cantidad de divisores y múltiplos de un número?

Resolución:

1. $$24 : \underbrace{-24;-12;-8;-6;-4;-3;-2;-1}_{\text{divisores } Z^+}$$

$$24 : \underbrace{1;2;3;4;6;8;12;24}_{\text{divisores } Z^+}$$

Si sumamos todos los divisores Z dicha suma sería igual a cero.

$$-18; \underbrace{-18;-9;-6;-3;-2;-1}_{\text{divisores } Z^-}$$

$$-18; \underbrace{1;\ 2^{3};\ 6;\ 9;\ 18}_{divisores\ Z^+}$$

2. $$\overset{0}{4} = 4k; k \in Z$$

$$\overset{0}{4} : \underbrace{\ldots -16;\ -12;\ -8;\ -4;}_{\text{múltiplos } Z^-}\ 0;\ \underbrace{4;\ 8;\ 12;\ldots\ldots}_{\text{múltiplos } Z^+}$$

$$\overset{0}{12} : \underbrace{\ldots -36;\ -24;\ -12;}_{\text{múltiplos } Z^-}\ 0;\ \underbrace{12;\ 24;\ 36;\ldots\ldots}_{\text{múltiplos } Z^+}$$

Se puede decir que.

- La cantidad de divisores de un número tanto en Z^+, como en Z es una cantidad limitada (el número de divisores en Z es finito).
- La cantidad de múltiplos con respecto de cierto módulo en Z es una cantidad ilimitada (el número de múltiplos en Z es infinita)
- La suma de los divisores en Z es cero.

Aplicación 2

¿Cuántos números Z^{+} menores o iguales que 100 son múltiplos de 5, 7 y 9?

Resolución:

1. Los múltiplos de 5 tienen la forma 5k, como deben ser menores o iguales que 100 se tendrá.

   $5k \leq 100$; $k \in Z+$

   $K \leq 20$

   Luego:

   $$k : \underbrace{1; 2; 3; .....; 20}_{\text{20 valores}}$$

   Para cada valor de k, reemplazando en 5k se tendrá un $\overset{0}{5}$.

   $$5k : \underbrace{5; 10; 15; 20; ....; 100}_{\text{20 valores}}$$

   ✓***NOTA.***

Para cada valor de K, se tendrá un $\overset{0}{5}$ también por ejemplo si $\begin{array}{r\|l} 100 & 5 \\ \hline & 20 \end{array}$ ya que en cada 5 números consecutivos encontramos un múltiplo de 5.

CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTOS

1. De las siguientes proporciones:
   I. El cero es múltiplo de todo entero positivo.
   II. Si "a" es divisible por "b" entonces "a" es factor de "b"
   III. La unidad siempre es divisor de todo entero positivo.
   IV. Todo número es múltiplo de si mismo. ¿Cuántos son verdaderos?

   A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

   Resolución:

2. Determine en forma explicita.
   I. Los divisores de 24 y -18 en Z
   II. Los múltiplos de 4 y 12 en Z

   ¿Qué se puede observar con respecto de la cantidad de divisores y múltiplos de un número?

   Resolución:

3. ¿Cuántos números de la forma $\overline{ab7}$ son múltiplos de 13?

   Resolución

4. ¿Cuántos números de 2 cifras cumplen con que al ser divididos entre 5 y 9 dejan como residuo 4 y 6 respectivamente?
   A) 2 B) 4 C) 6
   D) 3 E) 5
   Resolución

5. En una convención la cantidad de personas es múltiplo de 12 y también de 16. Podemos señalar que:
   Resolución:
6. ¿Cuántos números enteros positivos de 3 cifras son múltiplos de 13?
   A) 67 B) 69 C) 71
   D) 74 E) 82

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1. Halle el menor numeral de tres cifras que sea divisible por 6 ; 8 y 15
   A) 240 B) 90 C) 222
   D) 189 E) N.A
2. Magaly ha llevado a un grupo de no mas de 400 niños al parque infantil y observa que si los agrupa de 5 en 5; de 7 en 7; de 9 en 9 siempre sobra 3 ¿cuantos niños llevo Magaly?
   A) 405 B) 318 C) 425
   D) 388 E) N.A
3. Halle el mayor numeral de 4 cifras que tal que al dividirlo entre 6; 7; 8 y 11 se obtengan residuos máximos. De cómo respuesta la suma de sus cifras.
   A) 20 B) 18 C) 23
   D) 24 E) 25
4. ¿Cuántos números del uno al mil son múltiplos de 5 pero no de 25?
   A) 200 B) 18 C) 150
   D) 100 E) 160
5. Al dividir dos números entre 15 los residuos son 13 y 11. Hallar el residuo del producto de estos números entre 15.
   A) 16 B) 32 C) 42
   D) 48 E) 8
6. Al dividir 93 entre "n" el residuo es 2. Calcular cuantos valores puede tomar "n".
   A) 2 B) 8 C) 3
   D) 15 E) 35
7. En un almanaque que tiene 365 hojas cuántas veces se cumple que el número de hojas arrancadas es múltiplo de los que quedan.
   A) 2 B) 3 C) 4
   D) 5 E) 6

8. Si la siguiente suma es múltiplo de "a". Hallar el máximo valor de "a".

   $\overline{a1}_9 + \overline{a2}_9 + \overline{a3}_9 + \ldots\ldots + \overline{a8}_9$

   A) 3 B) 4 C) 6
   D) 8 E) 9

9. ¿Cuántos números del 1 al 500 son múltiplos de 41?

   A) 11 B) 12 C) 13
   D) 14 E) más de 14

10. ¿Cuántos números del 1 al 600 no son divisibles por 43?

    A) 584 B) 585 C) 586
    D) 587 E) 588