



IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS DE ÁNGULOS MÚLTIPLES

Objetivos

Deducir las identidades relativas a funciones trigonométricas de ángulo doble.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS MÚLTIPLES

A. **ÁNGULOS DOBLES.-** Se tiene:

Sen del ángulo doble

$$\text{Sen}(x + x) = \text{Sen}x\text{Cos}x + \text{Cos}x\text{Sen}x$$

$$\therefore \boxed{\text{Sen}2x = 2\text{Sen}x \text{ Cos}x}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\text{Sen}(10a) &= \text{Sen}(5a+5a) \\ &= 2\text{Sen} 5a \text{ Cosa}\end{aligned}$$

Coseno del Ángulo doble:

$$\text{Cos}(x+x) = \text{Cos}x\text{Cos}x - \text{Sen}x\text{Sen}x$$

$$\boxed{\text{Cos}2x = \text{Cos}^2x - \text{Sen}^2x}$$

También:

$$\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x$$

$$\text{Cos}2x = 2\text{Cos}^2x - 1$$

Ejemplo:

$$\text{Cos}6\beta = \text{Cos}^23\beta - \text{Sen}^23\beta$$

También:

$$\text{Cos}6\beta = 1 - 2\text{Sen}^23\beta$$

$$= 2\text{Cos}^23\beta - 1$$

Tangente del ángulo Doble:

$$\text{Tan}(x + x) = \frac{\text{Tan}x + \text{Tan}x}{1 - \text{Tan}x\text{Tan}x}$$

$$\therefore \boxed{\text{Tan}2x = \frac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}}$$

IDENTIDADES AUXILIARES

Sabemos que:

$$\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x$$

Ejemplo:

$$\text{Tan}4\theta = \frac{2\text{Tan}x}{1 - \text{Tan}^2x}$$

Ejemplo:

$$\tan 4\theta = \frac{2\tan 2\theta}{1 - \tan^2 2\theta}$$

IDENTIDADES AUXILIARES

Sabemos que:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

Además $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$$\Rightarrow \boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

B. ÁNGULO MITAD

Seno del ángulo mitad:

Si:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Si $x = \frac{\alpha}{2}$

$$\boxed{\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}$$

Ejemplo:

$$\sin \frac{45}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 45}{2}}$$

Coseno del ángulo mitad:

$$\boxed{\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}}$$

Ejemplo:

$$\cos \frac{75}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 75}{2}}$$

$$\boxed{\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}}$$

Ejemplo:

$$\tan \frac{30}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 30}{1 + \cos 30}}$$

Nota: El signo del 2º miembro se elige según el cuadrante del arco $\frac{\alpha}{2}$ y de razón

trigonométrica que lo afecta.

Ejemplo:

$$\sin \frac{315}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \cos 315}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

C. ÁNGULO TRIPLE

Senos del ángulo triple

Si:

$$\text{Sen}(2x+x) = \text{Sen}2x\text{Cos}x + \text{Cos}2x\text{Sen}x$$

$$\text{Como: } \text{Sen}2x = 2\text{Sen}x\text{Cos}x$$

$$\text{Cos}2x = 1 - 2\text{Sen}^2x$$

$$\therefore \text{Sen}3x = 3\text{Sen}x - 4\text{Sen}^3x$$

Ejemplo

$$\text{Sen}45^\circ = \text{Sen}3(15)$$

$$= 3\text{Sen}15 - 4\text{Sen}^315$$

Análogamente

$$\text{Cos}3x = 4\text{Cos}^3x - 3\text{Cos}x$$

$$\text{Tan}3x = \frac{3\text{Tan}x - \text{Tan}^3x}{1 - 3\text{Tan}^2x}$$

IDENTIDADES AUXILIARES

$$\text{Sen}x \text{ Sen}(60-x) \text{ Sen}(60+x) = \frac{1}{4} \text{Sen}3x$$

$$\text{Cos}x \text{ Cos}(60-x) \text{ Cos}(60+x) = \frac{1}{4} \text{Cos}3x$$

$$\text{Tan}x \text{ Tan}(60-x) \text{ Tan}(60+x) = \text{Tan}3x$$

$$\text{Ctg}x \text{ Ctg}(60^\circ-x) \text{ Ctg}(60^\circ-x) = \text{Ctg}3x$$

CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTOS

1. Simplificar:

a) $2\text{Sen}10x \text{ Cos}10x$

Resolución:

b) $\text{Sen}^29x - \text{Cos}^29x$

Resolución

2. Si $\text{Tan}\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Calcular $\text{Sen}2\theta$

Resolución:

3. Si $\text{Cos}\phi = \frac{12}{13}$; $270^\circ < \phi < 360^\circ$

Calcular: $\text{Sen}\frac{\phi}{2}$

Resolución:

4. Calcular:

$$(\text{Sen}7^{\circ}30' + \text{Cos}7^{\circ}30')^2$$

Resolución

5. Simplificar:

$$F = \frac{1 + 4\text{Cos}^3 4x - 3\text{Cos} 4x}{2(3\text{Sen} 2x - 4\text{Sen}^3 2x)^2}$$

Resolución:

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1. Simplificar:

a. $\text{Cos}^2 7x - \text{Sen}^2 7x$

b. $1 - 2\text{Sen}^2 5x$

c. $2\text{Cos}^2 4x - 1$

d. $4\text{Cos}^3 7 - 3\text{Cos} 7x$

e. $3\text{Sen} 10^{\circ} - 4\text{Cos}^3 80^{\circ}$

2. Si $\text{Sen} \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Calcular $\text{Cos} \theta$

3. Si $\text{Sen} \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$$

Calcular $\text{Cos} 3\alpha$

4. Si $\text{Cos} \phi = \frac{12}{13}$

$$270^{\circ} < \phi < 360^{\circ}$$

Calcular $\text{Cos} \frac{\phi}{2}$

5. Si $\text{Tg}(45-x) = \frac{-1}{2}$

Calcular $\text{Tg} 2x$

6. Calcular $\text{Cos} 6x$

Sabiendo que

$$\text{Cos} x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

7. Simplificar:

$$E = \text{Sen} x \text{Cos}^3 x - \text{Sen}^3 x \text{Cos} x$$

8. El equivalente de la expresión:

$$\text{Sen}20^\circ \text{Cos}^3 20^\circ - \text{Sen}^3 20^\circ \text{Cos} 20^\circ$$

Es:

9. Si $\text{Cos}\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Calcular $\text{Cos}4\beta$

PROBLEMAS PLANTEADOS

CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTOS

1. $\text{Ctg}\theta = \frac{1}{3}$

Calcular $\text{Tan}2\theta$

Resolución:

2. Calcular:

$$\text{Cos}10^\circ(\text{ctg}40^\circ + \text{Tg}40^\circ)$$

Resolución:

3. Hallar el valor de:

$$x = \left(1 + \text{Cos}\frac{\pi}{8}\right)\left(1 + \text{Cos}\frac{3\pi}{8}\right)\left(1 + \text{Cos}\frac{5\pi}{8}\right)\left(1 + \text{Cos}\frac{7\pi}{8}\right)$$

Resolución:

4. Si:

$$\text{Sen}^6\beta + \text{Cos}^6\beta = \frac{3}{4}$$

Calcular $\text{Cos}2\beta$

Resolución:

5. Si $\text{Cos}2a = \frac{1}{3}$

Calcular:

$$R = \text{Cos}^8 a - \text{Sen}^8 a$$

Resolución:

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1. Si $\text{Sec}x = \sqrt{5}$ además:

$$0^\circ < x < 90^\circ$$

Calcular: $\text{Sen}2x$

- a) 0,2 b) 0,4 c) 0,6
d) 0,8 e) 1

2. Si $\text{Cos}x = \frac{1}{4}$; $270^\circ < x < 360^\circ$

Calcular $\text{Cos} \frac{x}{2}$

- a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\sqrt{\frac{5}{8}}$
d) $\sqrt{\frac{5}{8}}$ e) $-\sqrt{\frac{3}{8}}$

3. $\text{Sen}x = \frac{1}{3}$

Calcular $\text{Sen}3x$

- a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{23}{27}$ c) $\frac{3}{17}$
d) $\frac{5}{27}$ e) $\frac{3}{8}$

4. Si $\text{Sec}\theta = \sqrt{10} \text{ Sen}\theta$

Determinar el valor de:

$$T = +\text{Cos}4\theta$$

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{5}$
d) $\frac{4}{7}$ e) n.a

5. Si $16\text{Cos}^2\alpha - 9 = 0$

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

Calcular $\text{Tg} \frac{\alpha}{2}$

- a) 1 b) $-\sqrt{7}$ c) $\sqrt{7}$
d) $\frac{-\sqrt{7}}{7}$ e) $\frac{-\sqrt{7}}{4}$

6. Simplificar:

$$\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} - \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$

- a) $\text{Tg}\theta$ b) $2\text{Tg}\theta$ c) $\text{Tg}2\theta$
 d) $2\text{Tg}2\theta$ e) $4\text{Tg}\theta$

7. Hallar k si cumple:

$$\cos^2(45-\alpha) - \sin^2(45-\alpha) = k \sin\alpha \cos\alpha$$

8. Si: $\frac{\sin x}{2} = \frac{\cos x}{3}$

Hallar: $\text{Tg}2x$

- a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{12}{5}$ c) $\frac{3}{4}$
 d) $\frac{4}{3}$ e) 3

9. Si: $\frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{1}{3}$

Calcular $\cos 4x$

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{9}$ c) $-\frac{1}{3}$
 d) $-\frac{7}{9}$ e) $-\frac{2}{3}$

10. Factorizar:

a. $E = \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1$

b. $4\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{24}$

c. $4\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{24}$

d. $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{24}$

e. $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$

f. $-4\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{12}$