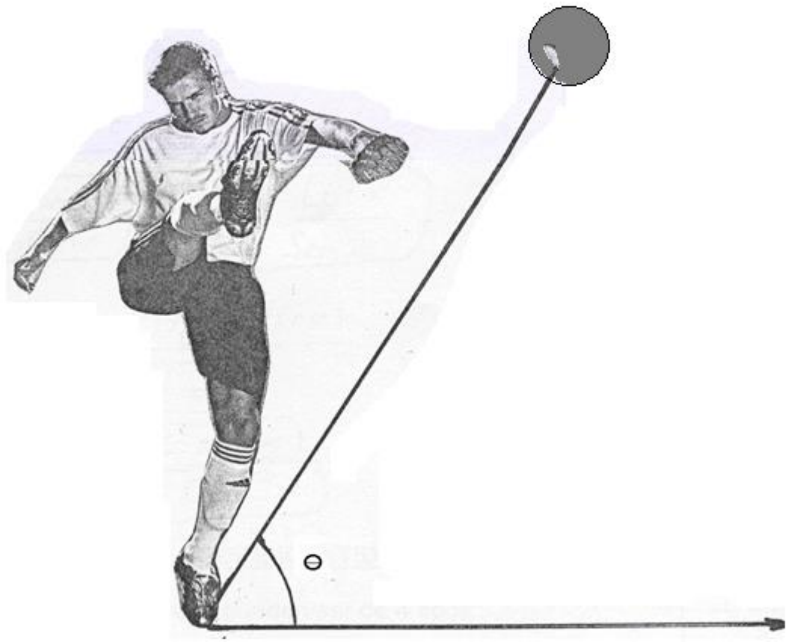
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Al finalizar el capitulo; Ud. Será capaz de:

1. Conocer los distintas relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo
2. reducir expresiones donde intervienen razones trigonométricas aplicando conveniente las identidades dadas.



Una de las muchas aplicaciones que se puede presentar sobre las identidades trigonométricas se muestra en la figura. La distancia “d” que recorrerá la pelota en el aire esta dada por la expresión: $\boxed{d = \dfrac{2V^2 Sen\theta Cos\theta}{9}}$

Aplicando Identidades queda Simplificada: $\boxed{d = \dfrac{V^2 Sen2\theta}{9}}$

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS FUNDAMENTALES

Son igualdades en las que intervienen razones trigonométricas, las cuales se verifican para todo valor permitido de la variable, las Identidades principales son:

A <u>Identidades Reciprocas</u>

$\boxed{\text{Sen x Cscx} = 1}$ $\boxed{\text{Cosx Secx} = 1}$

<u>NO OLVIDES</u>

Cscx = $\dfrac{1}{Sen}$

Secx = $\dfrac{1}{Cosx}$

Ctgx = $\dfrac{1}{Tanx}$

IDENTIDADES AUXILIARES

$Sen^4x+Cos^4x=1-2Sen^2xCos^2x$
$Sen^6x+Cos^6x = 1-3Sen^2xCos^2x$
$Sec^2+Csc^2x = Sec^2x \ . \ Csc^2x$
$Tagx + Ctgx = Secx \ . \ Cscx$
$(1\pm Senx\pm Cosx)^2=2(1\pm Senx)(1\pm Cosx)$
$Versx = 1-Cosx$
$Covx = 1-Senx$
$Ex\ Secx = Secx-1$

Tan x Ctgx =1

B Identidades Por Cociente:

$Tanx = \dfrac{Senx}{Cosx}$	$Cta\ x= \dfrac{Cosx}{Senx}$

C Identidades Pitagóricas:

$\boxed{Sen^2 + Cos^2x = 1}$

$\boxed{1 + Tan^2x = Sec^2x}$

$\boxed{1 + Cta^2x = Csc^2x}$

TIPOS DE EJERCICIOS SOBRE IDENTIDADES

Los ejercicios sobre identidades pueden ser de 4 tipos:

I. **Demostraciones:** Para demostrar una identidad, implica que el primer miembro se pueda reducir al segundo miembro o viceversa o que cada miembro por separado se pueda reducir a una misma forma. Para la verificación de identidades se puede utilizar las diferentes transformaciones tanto algebraicas como trigonométricas y en este último caso resulta muy útil escribir la identidad en términos de senos y cosenos.

Ejemplo: Demostrar que:

$$\frac{(Senx+Cosx)^2-1}{Ctgx-SenxCosx}=2Tan^2x$$

Resolución:

$$\frac{Sen^2x+Cos^2x+2SenxCosx-1}{\dfrac{Cosx}{Senx}-SenxCosx}=\frac{2SenxCosx.Senx}{Cosx(1-Sen^2x)}=\frac{2Sen^2x}{Cos^2x}=2Tan^2x$$

TE RETO

Demostrar:

$$\frac{1+Senx+Cos^2x}{1+Senx}=2-Senx$$

II. **Simplificaciones:** Se buscara una expresión reducida de la planteada con ayuda de las Identidades fundamentales y/o auxiliareis con transformaciones algebraicas.

Ejemplo: Simplificar:

$$P=\frac{Senx.Secx}{Cosx+SenxTanx}$$

Resolución:

$$P=\frac{Senx.\frac{1}{Cosx}}{Cosx+Senx.\frac{Senx}{Cosx}}$$

$$P=\frac{\frac{Senx}{Cosx}}{Cosx+\frac{Sen^2x}{Cosx}}$$

$$P=\frac{\frac{Senx}{Cosx}}{\frac{Cos^2x+Sen^2x}{Cosx}}=\frac{Senx}{1}=Senx$$

III. **Condiciones:** Si la condición es complicada debemos simplificarla y así llegar a una expresión que pueda ser la perdida o que nos permita hallar fácilmente la que nos piden de lo contrario se procede a encintrar la expresión pedida.

Si Senx-Cosx= $\frac{1}{3}$ Hallar Secx.Cscx

Resolución:

$$Secx.Cscx=\frac{1}{Cosx}.\frac{1}{Senx}=\frac{1}{SenxCosx}...(I)$$

Además:

$$(Senx\text{-}Cosx)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$Sen^2x+Cos^2x-2SenxCosx=\frac{1}{9}$$

$$-2SenxCosx=\frac{1}{9}-1$$

$$SenxCosx=\frac{4}{9}$$

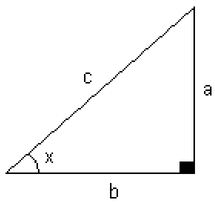
En (I) $\frac{1}{SenxCosx}=\frac{1/1}{\frac{4}{9}}=\frac{9}{4}$

IMPORTANTE

Una buena recomendación consiste en transformar todo el miembro elegido en una expresión en función de Seno y Coseno

NO OLVIDES

En:



$a^2 = c^2 - b^2$
$c^2 = a^2 + b^2$
$b^2 = c^2 - a^2$

DESAFIO

Calcular el equivalente de:
$(Csc\theta - Ctg\theta)(Ctg\theta + Csc\theta)$

TRIGONOMETRIA

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Demostrar
   $Cos^2\alpha - Sen^2\alpha = 2Cos^2\alpha - 1$
2. $\dfrac{Sen^4\alpha Cos^2\alpha + Cos^4\alpha Sen^2\alpha}{Sen^2\alpha Cos^2\alpha} = 1$
3. Demostrar:
   $\dfrac{Sen^3\alpha - Cos^3\alpha}{1 + Sen\alpha Cos\alpha} = Sen\alpha - Cos\alpha$
4. Verificar:
   $\dfrac{Sen^3\alpha - Cos^3\alpha}{1 + Sen\alpha Cos\alpha} = Sen\alpha - Cos\alpha$
5. Verificar:
   $\dfrac{1 - Ctg^4\alpha}{Csc^2\alpha} = 1 - ctg^2\alpha$
6. Simplificar:
   $P = (Senx - Cosx)^2 + \dfrac{2}{Secx.Cscx}$
7. Simplificar:
   $R = (2Sen^2\theta - 1)^2 + 4Sen^2\theta Cos^2\theta$
8. Si α y θ son complementarios, simplificar:
   $E(Sen^2\alpha + Cos^2\theta)(1 + Tan^2\theta)$
9. Simplificar:
   $P = \dfrac{(1 + Sen\theta + Cos\theta)(1 - Sen\theta - Cos\theta)}{Sen\theta Cos\theta}$

REFORZANDO MIS CAPACIDADES
Demostrar:

1. $Sen^2\alpha + Cos^2\alpha = 1$
2. $\dfrac{Ctg\alpha}{Tan\alpha} + 1 = Csc^2\alpha$
3. $Tan\alpha + Ctg\alpha = Sec\alpha.Csc\alpha$
4. $\dfrac{Sen^3\alpha}{Cos\alpha} + Sen\alpha Cos\alpha = Tan\alpha$
5. $(Tang\alpha + Ctg\alpha)^3 = Sec^3\alpha.Csc^3\alpha$
6. $(Tan\alpha + Ctg\alpha)^2 + (Tan\alpha - Ctg\alpha)^2 = 2(sec^2\alpha Csc^2\alpha - 2)$

TRIGONOMETRIA

7. $Sen^6\alpha+Cos^6\alpha=1-3Sen^2\alpha Cos^2\alpha$

8. Simplificar:

$$E=\frac{(Senx+Cosx)^2-1}{2Senx}$$

a) 1 b) Senx c) Cosx
d) 2Senx e) 2Cosx

9. Simplificar:

$$E=\frac{Cscx+Tanx}{Senx+Ctgx}$$

a) Senx b) Cosx c) Secx
d) Cscx e) 1

10. Reducir:

$$E=(1+senx)(\sec x-\tan x)\sec x$$

a) 1 b) Cosx c) Cos^2x
d) Senx e) Sen^2x

11. Simplifica:

$$R=\frac{(Sec\alpha+Csc\alpha)^2+(\sec\alpha+\csc\alpha)^2}{Sec^2\alpha.Csc^2\alpha}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) n.a

12. Si: P=SenxCtgx
Q=CosxTanx

Calcular: p^2+q^2

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) -1

13. Sabiendo que:

$Sen\alpha\ .\ Cos\alpha=\frac{1}{3}$

Calcular:

$$P=\frac{Sen^4\alpha+Cos^4\alpha}{Sen^6\alpha+Cos^6\alpha}$$

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{7}{6}$

IV. **Eliminación del ángulo:** Estos ejercicios consisten en que a partir de ciertas relaciones trigonométricas debemos encontrar relaciones algebraicas en donde no aparezca el ángulo.

EJEMPLOS

1. Determinar una expresión independiente de la variable angular "x"; si se sabe que se verifican los siguientes condiciones:

$$\frac{a}{Senx}=\frac{b}{Cosx}\text{.........(1)}$$

$$Senx\,.\,Cosx=\frac{1}{3}\text{......(2)}$$

Resolución:

De (2) ……..: $\frac{1}{Senx}\cdot\frac{1}{Cosx}=3$

Secx . Cscx=3

$\therefore$ Tanx+Ctgx=3

Reemplazado en 1

Porque: $\frac{Senx}{Cosx}=\frac{a}{b}$ $\therefore Tanx=\frac{a}{b}$

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$ $\therefore \boxed{a^2+b^2=3ab}$

2. Eliminar θ en:

Senθ=x y Cosθ=y

Resolución:

Sea Senθ=x …… I
Cosθ=y …… II
Elevamos al cuadrado
$Sen^2\theta=x^2$ …… I
$Cos^2\theta=y^2$…… II
Sumamos: I y II

$Sen^2\theta+Cos^2\theta=x^2+y^2$

$\boxed{1=x^2+y^2}$

ATENCIÓN

En este tipo de problemas tenemos que operar con las igualdades proporcionadas de tal modo que obtengamos otra donde no aparezca el ángulo a eliminar.

DESAFIO

Eliminar x en:
a + b Senx = 2
a – b Cosx = 4

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

TRIGONOMETRIA

1. Si $\tan\alpha + ctg\alpha = \sqrt{6}$
   Calcular $Tan^2\alpha+Ctg^2\alpha$

2. Si $Sen\alpha+Csc\alpha= 4$
   Calcular: $Sen^2\alpha+Csc^2\alpha$

3. Si $Sen\alpha+Cos\alpha=\frac{5}{4}$
   Calcular: $Sen\alpha\ Cos\alpha$

4. Sabiendo que:
   $a=Sen\alpha Sen\beta Cos\theta$
   $b=Cos\alpha Cos\theta Sen\beta$
   $c=Sen\beta Sen\theta$
   $d=Cos\beta$
   Hallar: $a^2+b^2+c^2+d^2$

5. Si se sabe que:
   a Ctgx=b
   Calcular:
   $$M=\frac{aCosx-bSenx}{bSenx+aCosx}$$

6. Sea:
   $Sen\alpha=a$
   $Cos\alpha=b$
   Eliminar el ángulo.

7. Eliminar el ángulo en:
   $Ctg\alpha=p$
   $Cosc\alpha=q$

8. $Sen\alpha+Csc\alpha=x \wedge Sen\alpha-Csc\alpha=y$
   Eliminar α

9. Eliminar x de:
   $(1+Senx)\ (1+Cosx) = m \wedge$
   $(1-Senx)\ (1-Cosx)=n$

10. Eliminar x:
    Si: $Senx+Cosx=a$
    $Senx-Cosx=b$

TRIGONOMETRIA

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1. Si $Tan\alpha+Ctg\alpha=\sqrt{5}$
   Calcular $Tan^4\alpha+Ctg^4\alpha$
   Rpt.

2. Si:
   $Csc\alpha-Sen\alpha=2$
   Calcular: $Csc^2\alpha+Sen^2\alpha$
   Rpt.

3. Si $Sec\alpha Csc\alpha=2$
   Calcular: $Sen^6\alpha+Cos^6\alpha$
   Rpt.

4. Si $Sen\alpha-Cos\alpha=\frac{2}{5}$
   Calcular: $Sen\alpha\ cos\alpha$
   Rpt.

5. Si:
   $Secx - Tanx = \frac{1}{4}$
   Calcular "Ctgx"
   a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{4}{15}$ c) $\frac{8}{15}$
   d) $\frac{15}{4}$ e) $\frac{15}{8}$

6. Si Tanx+Ctgx=3
   Calcular:
   $E=(1+Tanx)^2+(1+Ctgx)^2$
   a) 6 b) 9 c) 12
   d) 15 e) 18

7. Si: Secx-Cosx=m
   Cscx-Senx=n
   Calcular: Tanx
   a) $\frac{m}{n}$ b) $\frac{n}{m}$ c) $\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{n}{m}}$ e) $\sqrt{\frac{m}{n}}$

8. Si Tan α =m $\wedge$ Sec α = n
Eliminar α
Rpt.

9. Tanα+Ctgα=p
Tanα-Ctgα=q
Eliminar: α
Rpt.

10. Elimina "x" a partir de:
a=mSenx $\wedge$ b=mCosx
a) a+b=m
b) $a^2+b^2=m$
c) $a^2+b^2=m^2$
d) $a+b=m^2$
e) ab=m

11. Elimina "x" de:
Tanx + ctgx = a $\wedge$
$Sec^2+Csc^2x = b$
a) a=b+1
b) $a^2=b+1$
c) $a^2=b$
d) $a^2=b^2+1$
e) $a=b^2$