IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS FUNAMENTALES

Son igualdades en las que intervienen razones trigonométricas, las cuales se verifican para todo valor permitido de la variable, las Identidades principales son:

A Identidades Reciprocas

$\boxed{\text{Sen x Cscx} = 1}$ $\boxed{\text{Cosx Secx} = 1}$

$\boxed{\text{Tan x Ctgx} = 1}$

B Identidades Por Cociente:

$$\text{Tanx} = \frac{\text{Senx}}{\text{Cosx}} \qquad \text{Cta x} = \frac{\text{Cosx}}{\text{Senx}}$$

C Identidades Pitagóricas:

$\boxed{Sen^2 + Cos^2x = 1}$

$\boxed{1 + Tan^2x = Sec^2x}$

$\boxed{1 + Cta^2x = Csc^2x}$

IDENTIDADES AUXILIARES

$Sen^4x+Cos^4x=1-2Sen^2xCos^2x$
$Sen^6x+Cos^6x = 1-3Sen^2xCos^2x$
$Sec^2+Csc^2x = Sec^2x \ . \ Csc^2x$
Tagx + Ctgx = Secx . Cscx
$(1\pm Senx\pm Cosx)^2=2(1\pm Senx)(1\pm Cosx)$
Versx = 1-Cosx
Covx = 1-Senx
Ex Secx = Secx-1

TE RETO

Demostrar:

$$\frac{1+Senx+Cos^2x}{1+Senx} = 2-Senx$$

TIPOS DE EJERCICIOS SOBRE IDENTIDADES

Los ejercicios sobre identidades pueden ser de 4 tipos:

I. **Demostraciones:** Para demostrar una identidad, implica que el primer miembro se pueda reducir al segundo miembro o viceversa o que cada miembro por separado se pueda reducir a una misma forma. Para la verificación de identidades se puede utilizar las diferentes transformaciones tanto algebraicas como trigonométricas y en este último caso resulta muy útil escribir la identidad en términos de senos y cosenos.

Ejemplo: Demostrar que:

$$\frac{(Senx+Cosx)^2-1}{Ctg-SenxCos} = 2Tan^2x$$

Resolución:

$$\frac{Sen^2x+Cos^2x+2SenxCosx-1}{\dfrac{Cosx}{Senx}-SenxCosx} = \frac{2SenxCosx.Senx}{Cosx(1-Sen^2x)} = \frac{2Sen^2x}{Cos^2x} = 2Tan^2x$$

II. **Simplificaciones:** Se buscara una expresión reducida de la planteada con ayuda de las Identidades fundamentales y/o auxiliareis con transformaciones algebraicas.

Ejemplo: Simplificar:

$$P = \frac{Senx.Secx}{Cosx + SenxTanx}$$

Resolución:

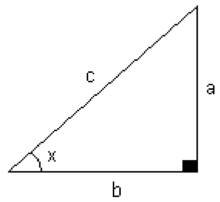
$$P = \frac{Senx.\frac{1}{Cosx}}{Cosx + Senx.\frac{Senx}{Cosx}}$$

$$P = \frac{\frac{Senx}{Cosx}}{Cosx + \frac{Sen^2x}{Cosx}}$$

$$P = \frac{\frac{Senx}{Cosx}}{\frac{Cos^2x + Sen^2x}{Cosx}} = \frac{Senx}{1} = Senx$$

NO OLVIDES

En:



$a^2 = c^2 - b^2$
$c^2 = a^2 + b^2$
$b^2 = c^2 - a^2$

III. **Condiciones:** Si la condición es complicada debemos simplificarla y así llegar a una expresión que pueda ser la perdida o que nos permita hallar fácilmente la que nos piden de lo contrario se procede a encintrar la expresión pedida.

Si Senx-Cosx= $\frac{1}{3}$ Hallar Secx.Cscx

Resolución:

Secx.Cscx= $\frac{1}{Cosx}.\frac{1}{Senx} = \frac{1}{SenxCosx}$...(I)

Además:

$(Senx-Cosx)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$Sen^2x+Cos^2x-2SenxCosx = \frac{1}{9}$

$-2SenxCosx = \frac{1}{9} - 1$

$SenxCosx = \frac{4}{9}$

En (I) $\frac{1}{SenxCosx} = \frac{1/1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

DESAFIO

Calcular el equivalente de:
$(Csc\theta - Ctg\theta)(Ctg\theta + Csc\theta)$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Demostrar
   Senx . Secx = Tanx

2. Demostrar:
   $Cos^3\theta + Cos\theta Sen^2\theta = Cos\theta$

3. Demostrar:
$$\left(Ctg^2x + Cos^2x + \frac{1}{Csc^2x}\right)Senx = Cscx$$

4. Demostrar:
$(Tan\alpha+Ctg\alpha)^3=Sec^3\alpha Csc^3\alpha$
5. Demostrar:
$1-Tan^2\alpha Cos^4\alpha-Ctg^2\alpha Sen^4\alpha= Sen^4\alpha+Cos^4\alpha$
6. Si: $Cos^4\theta-Sen^4\theta=MCos^2\theta-1$
Es una identidad. Hallar M.
7. Determinar "n" en:
$$\frac{Sec\theta - Cos\theta}{Csc\theta - Sen\theta} = (ctg\theta)^n$$
8. Simplificar:
$(Sen^4\alpha Cos^2\alpha+Cos^4\alpha Sen^2\alpha)(Tan\alpha+Ctg\alpha)^2$
9. Reducir:
$Sen^2x.Ctgx.Secx-Senx.Ctgx+Cos^2x.tanx$
10. Simplificar:
$$E = (Cscx - Ctgx)\left(\frac{Senx}{1+Cosx} + \frac{1+3Cosx}{Senx}\right)$$

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

Demostrar:

1. $Sec^2x-Tan^2x=1$
2. $Sen^4x+Cos^4x=1-2Sen^2xCos^2x$
3. $Tanx+ctgx=secxcscx$
4. $\frac{Sen^3\alpha}{cos\alpha} + Sen\alpha Cos\alpha = Tanx$
5. $\frac{1-cosx}{senx} = \frac{sen\alpha}{1-cos\alpha}$
6. $(sen\alpha+cos\alpha)^2(sen\alpha-cos\alpha)^2 =2(sen^4\alpha+cos^4\alpha)-1$
7. $(Tan\alpha-ctg\alpha)(tan^2\alpha+csc^2\alpha)=tan^3\alpha-ctg^3\alpha$
8. Simplificar:

$$P = (Senx - cosx)^2 + \frac{2}{secx.cscx}$$

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) n.a

9. Simplificar:

$$A = \left(1 + \frac{sen\alpha}{cos\alpha}\right)^2 - \frac{2}{cos^2\alpha}$$

a) $2tan\alpha$
b) $Sec^2\alpha$
c) $2tan\alpha+sec^2\alpha$
d) $2tan\alpha-sec^2\alpha$
e) n.a

10. Simplificar:

$$\frac{Sen\alpha + Tan\alpha}{Ctg\alpha + Csc\alpha}$$

a) $Sec\alpha tan\alpha$
b) $cos\alpha tan\alpha$
c) $sen\alpha tan\alpha$
d) $csc\alpha ctg\alpha$
e) $sec\alpha csc\alpha$

11. Simplificar:

$$T = \frac{Seca - Cosa}{Csca - Sena}$$

a) Sec^2a
b) $1-tan^2a$
c) Sen^3acos^3a
d) Tan^3a
e) 1

12. Reducir:

$$P = \frac{Cosx}{1 - Senx} - \tan x$$

a) 1
b) Senx
c) Secx
d) Cosx
e) Cscx

13. ¿Qué valor debe ocupar k para ser una identidad?
$Sec\theta - Cos\theta = Ksec\theta$

a) $Sen\theta$
b) $Cos\theta$
c) $Sec\theta$
d) $Csc\theta$
e) $Sen^2\theta$

Al simplificar:

$$P = \left[\frac{Senx}{1 + Cosx} + \frac{1 + Cosx}{Senx}\right] Senx$$

Se obtiene:
a) 1
b) 2
c) Senx
d) Cosx
e) Tanx

ATENCIÓN

En este tipo de problemas tenemos que operar con las igualdades proporcionadas de tal modo que obtengamos otra donde no aparezca el ángulo a eliminar.

14. Al simplificar:

$$\frac{(Tanx - Senx)(ctgx - Cosx)}{(Secx - 1)(Cscx - 1)}$$

Se obtiene:
a) Senx
b) Cosx

c) Tanx
d) Senx Cosx
e) n.a

IV. **Eliminación del ángulo:** Estos ejercicios consisten en que a partir de ciertas relaciones trigonométricas debemos encontrar relaciones algebraicas en donde no aparezca el ángulo.

EJEMPLOS

1. Determinar una expresión independiente de la variable angular "x"; si se sabe que se verifican los siguientes condiciones:

$$\frac{a}{Senx}=\frac{b}{Cosx}\text{.........(1)}$$

$$Senx\,.\,Cosx=\frac{1}{3}\text{......(2)}$$

Resolución:

De (2) ……..: $\frac{1}{Senx}.\frac{1}{Cosx}=3$

Secx . Cscx=3

$\therefore$ Tanx+Ctgx=3

Reemplazado en 1

Porque: $\frac{Senx}{Cosx}=\frac{a}{b}$ $\quad\therefore Tanx=\frac{a}{b}$

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$ $\qquad\therefore \boxed{a^2+b^2=3ab}$

DESAFIO

Eliminar x en:
a + b Senx = 2
a – b Cosx = 4

2. Eliminar θ en:

Senθ=x y Cosθ=y

Resolución:

Sea Senθ=x …… I
Cosθ=y …… II
Elevamos al cuadrado
$Sen^2\theta=x^2$ …… I
$Cos^2\theta=y^2$…… II
Sumamos: I y II

$Sen^2\theta+Cos^2\theta=x^2+y^2$

$1= x^2+y^2$

CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTOS

1. Si Tanx=$\frac{2}{3}$ calcular:
A=Sen m+ Cos m

2. Si $Sen^2\theta + Csc^2\theta = 7$
Calcular: A = 2Senθ + Cosθ Ctgθ

3. Calcular el valor numérico de:
   $Q=Cosz(Senz+Cos^2z.Cscz)$
   Se sabe que: $Tan^2z=0,25$
4. Se sabe que:
   $Cosa + Sena\ Tana=\frac{6}{5}$
   Calcular Seca
5. Se sabe que:
   $P=Sec^2P-1$
   $Z=Csc^2p-Ctg^2p$
   $A=1-Sen^2p$
   Hallar: P.A.Z
6. Sea:
   $Sen\alpha=a$
   $Cos\alpha=b$
   Eliminar el ángulo.
7. Si Senx + Cosx=b
   Hallar el valor de:
   R=2Senx . Cosx+1
8. Si Senx-Cscx=7
   Calcular Senx + Cscx

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1. Si Senx+Cosx **.** Ctgx=1,2
   Calcular: Cscx
   a) 1 b) 1,2 c) 0,8
   d) 0,6 e) n.a

2. Hallar "x" para que sea una identidad:
   $Ctg\alpha - Cos\alpha = xCtg\alpha$
   a) $1-Cos\alpha$ b) $1-Sen\alpha$ c) $Tan\alpha$
   d) $Ctg\alpha$ e) n.a

3. Sabiendo que:
   $Sen\theta + Cos\theta=\sqrt{2}$ encontrar $M=Tan\theta + Ctg\theta$
   a) 1 b) -1 c) 2
   d) 5 e) n.a

4. Si: Cscx – Senx = a
   Secx – Cosx = 2a
   Hallar Tan x:
   a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{2}$
   d) $\sqrt[3]{3}$ e) $\sqrt[4]{2}$

5. Si: $\frac{Sec^2\alpha}{a}-\frac{Tan^2\alpha}{b}=\frac{1}{ab}$
   Hallar: $Tan\alpha$
   a) $\sqrt{\frac{b-1}{a-b}}$ b) $\sqrt{\frac{a-b}{b-1}}$ c) $\sqrt{\frac{b-1}{a-1}}$
   d) $\sqrt{\frac{a-1}{b-1}}$ e) n.a

6. Si $2Sec^2x-Csc^2y=1$

Calcular: $M=2Sec^2y-Csc^2x$

a) 1 b) -1 c) 0
d) 2 e) -2

7. Eliminar "x" de:
Tanx + ctgx=m
Tanx – ctgx=n

a) mn=1 b) 2mn=1 c) 4mn=1

d) $m^2+n^2=1$ e) $m^2-n^2=4$

8. Si se sabe que:
$Sen\theta = 0,4$
Calcular el valor de:
$C=(Sen^2\theta-1)^2\left(\frac{1}{Tan^2\theta}\right)Cos^2\theta$

a) $\frac{24}{25}$ b) $\frac{3}{4}$ c) 1
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{4}{5}$

9. Si $Sen\theta + Csc\theta=a$, calcular:
$E=Sen^2\theta + Csc^2\theta$
a) a^2 b) 2 c) a^2-1
d) a^2-2 e) n.a

10. Elimina "θ" de:
$x=1+Sen\theta+Sen^2\theta+Sen^3\theta+\ldots..$
$y=1+Cos2\theta+Cos^2\theta+Cos^3\theta+\ldots.$
a) $\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+\left(1+\frac{1}{y}\right)^2=1$
b) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+\left(1+\frac{1}{y}\right)^2=1$
c) $(1-x)^2+(1-y)^2=1$
d) $(1+x)^2+(1+y)^2=1$
e) N.a