



GEOMETRÍA ANALÍTICA

Objetivos:

Al finalizar el presente capítulo el alumno estará en la capacidad de:

- Estudiar adecuadamente el sistema de ejes coordenados y la ubicación de un punto en dicho sistema mediante el concepto de par ordenado.
- Comprender y aplicar correctamente los axiomas para las operaciones con vectores.
- Manejar el concepto de circunferencia y lugares geométricos en el sistema de ejes coordenados y sus aplicaciones.

INTRODUCCIÓN

El ser humano, debido a su sentido común de los objetivos que lo rodea, ya sea por intuición o por necesidad, siempre busca una respuesta. Entonces, en ese afán, de encontrar una respuesta o un camino que lo conduzca hacia su objetivo, realiza muchos intentos de investigación y exploración en todos los campos, específicamente en las matemáticas, desde la necesidad de crear los números para cuantificar diversas magnitudes, así tenemos por ejemplo, para medir los terrenos, contar sus productos, contar sus ganados (idea de número entero); así también, para introducir las variables que le permita determinar la rapidez con la que una persona se desplaza de un lugar a otro, este desplazamiento lo puede realizar en una sola dirección; entonces, para ello crea un eje. Y cuando tiene que desplazarse una cierta distancia en una dirección y otra distancia en otra dirección, para ello crea dos ejes; una en dirección horizontal y otra en dirección vertical el cual tendrá en común un punto fijo denominado origen. Entonces, al revisar la historia de las matemáticas, encontramos muchos nombres de grandes hombres de ciencia, quienes aportaron para el desarrollo, así tenemos, por ejemplo a Kepler en el siglo XIV quien manejó la idea de ejes, pero: es con el gran filósofo y matemático francés Renato Descartes (1 596 – 1 650) quien profundizó y analizó en una de sus obras publicada en 1 637 dedicado exclusivamente, al tratado de la geometría analítica, el estudio analítico de los ejes coordenados o coordenadas cartesianas en dicho sistema, realizó el estudio de las propiedades y naturaleza de la línea curva. Pero, contemporáneo a Descartes, se tiene a otro gran matemático, como Pierre Fermat (1 601 - 1665) quien realizó el estudio y analizó las ecuaciones de la línea recta, la circunferencia y las cónicas. Sin embargo, la geometría analítica, también fue denominada posteriormente la geometría de los métodos algebraicos y este da lugar a la creación del análisis de las variables, del algebra vectorial y la geometría analítica vectorial, este último, de gran importancia en el campo de la matemática, la física matemáticas y de la extraordinaria teoría de la relatividad, creada por Einstein y así entrar al campo vectorial y sus métodos aplicativos.

Sistema de Números Reales

Es un conjunto de números reales, definido con las operaciones de suma, multiplicación y la relación de orden mayor ($>$), menor ($<$), mayor o igual ($\geq$) y menor igual ($\leq$); el sistema de los números reales se fundamenta en base a los siguientes axiomas:

Sean a , b y c tres números reales

Luego:

1. $a + b \in \mathbb{R}$ (ley de clausura)
2. $a + b = b + a$ (ley conmutativa)
3. $(a+b)+c = a+(b+c)$ (ley asociativa)
4. $a \cdot b \in \mathbb{R}$ (ley de clausura)
5. $a \cdot b = b \cdot a$ (ley conmutativa)
6. $(ab) \cdot c = a(bc)$ (ley asociativa)

Axioma de Existencia y Unicidad del Elemento Inverso Aditivo

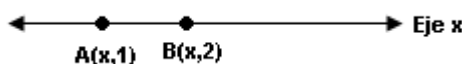
Para cada $a \in \mathbb{R}$, existe un único elemento en $\mathbb{R}$, denotado por $(-a)$; que cumple la siguiente relación: $a + (-a) = (-a) + a = 0$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES EN LA RECTA NUMÉRICA REAL O EJE X.

A la recta, sobre el cual se fijan los números reales, se denomina recta numérica real o eje de abscisas (eje x). En dicho eje los números reales se representan mediante una relación de orden.

Veamos el siguiente ejemplo que nos ilustra la relación de orden.

Sean los números reales x_1 x_2 ubicados en el eje x tal que: x_1 es menor que x_2 esto es, si el punto A de abscisas x_1 está a la izquierda del punto B de abscisas x_2 .



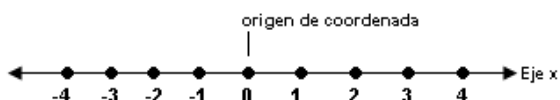
Tal como se observa en la figura, la posición de un punto en el eje x, se denota, ubicando una letra mayúscula y a la derecha entre paréntesis el número real, así:

A(x_1): se lee: punto A de abscisa x_1 o x_1 es la abscisa del punto A.

B(x_2): se lee: punto B de abscisa x_2 o x_2 es la abscisa del punto B.

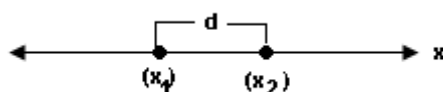
Luego del ejemplo expuesto, concluimos que; a cada punto del eje x se hace corresponder un número real único e inversamente, un número real se hace corresponder un único punto de dicho eje, de esta forma, se establece, una correspondencia biunívoca entre el conjunto de puntos del eje y el conjunto de los números reales.

En la siguiente figura, ubiquemos un punto de abscisa cero 0 el cual se denomina origen de coordenadas.



DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos de abscisa x_1 y x_2 en el eje x está dado por:



$$d = |x_2 - x_1|$$

El sistema de los números reales, es el conjunto $\mathbb{R}$, el cual, está asociado a la recta numérica real o eje x.

Entonces, el producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ es el conjunto de todos los pares ordenados del plano que está determinado por dos rectas numéricas reales perpendiculares, siendo estos, horizontal y vertical respectivamente, dichas rectas son los ejes de coordenadas rectangulares o plano cartesiano y a la intersección de los ejes se denomina origen de coordenadas.

En el gráfico, se muestra el plano cartesiano, entonces, del origen de coordenadas hasta la derecha, se ubican los puntos cuyos números asociados son positivos y a la izquierda los puntos cuyos números asociados son negativos, en el eje vertical, del origen hacia arriba se ubican los puntos cuyos números son positivos y hacia abajo los puntos cuyos números asociados son negativos.

UBICACIÓN DE UN PUNTO EN EL PLANO CARTESIANO

Postulado

En todo plano existen infinitos puntos.

Entonces, en el plano cartesiano, existen infinitos puntos y a cada punto se le asocia un único par o pareja de números, el cual se denomina **Par Ordenado $(x_0; y_0)$** .

Estas son distancias a los ejes o pertenecen a dichos ejes, el cual, está fijado por una recta horizontal denominada, eje de abscisas o eje x y otra recta vertical denominado eje de ordenadas o eje y.

Notación de Par Ordenado

$(x_0; y_0)$ donde:

x_0 : es la abscisa

y_0 : es la ordenada

En el plano cartesiano se realizan las siguientes aplicaciones.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La distancia entre dos puntos cualesquiera $P(x_0; y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$ en el plano cartesiano, esta dado por:

En la figura:

PMQ: aplicando el teorema de Pitágoras

$$d^2_{(P,Q)} = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

$$d_{(P,Q)} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA

Sean los puntos $P(x_0; y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$ y $M(x, y)$ un punto del $\overline{PQ}$ tal que $\frac{PM}{MQ} = r$

Entonces las coordenadas de M esta dado por:

Siendo: $\frac{PM}{MQ} = r$

ordenando y despejando x_0

$$x_0 = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \quad \forall \neq r = -1$$

En forma análoga, se despeja y_0

$$y_0 = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \quad \forall \neq r = -1$$

Dadas las coordenadas $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ del punto A y B, luego, las coordenadas de un punto P que pertenece a $\overline{AB}$ tal que $AP = m$ y $PB = n$ se expresa en función de dichas coordenadas y de m, n

En la figura:

AMP PFB

$$\frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_0} = \frac{m}{n} \Rightarrow x_0 = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}$$

En forma análoga, se obtiene y_0 :

$$y_0 = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}$$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Dado el segmento de extremos A y B cuyas coordenadas son A = (x₁; y₁), B = (x₂; y₂) y M es el punto medio de $\overline{AB}$, tal que: M = (x, y), luego las coordenadas del punto M se determina mediante la semisuma de las respectivas coordenadas de A y B.
En la figura por base media en los trapecios rectángulos AA'B'B y AA''B''B.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

CÁLCULO DE LAS COORDENADAS DEL BARICENTRO DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

Las coordenadas del baricentro de una región triangular, siempre está, en función de las coordenadas de sus vértices.

En la figura, G es baricentro de la región triangular ABC.

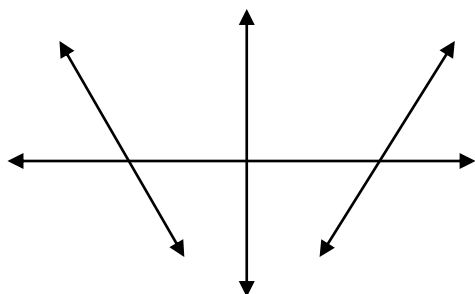
Luego:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

INCLINACIÓN DE UNA RECTA

Es el ángulo que forma la recta con el eje de abscisas.

mide a partir del eje x hasta la ubicación de la recta, tomado en sentido antihorario.

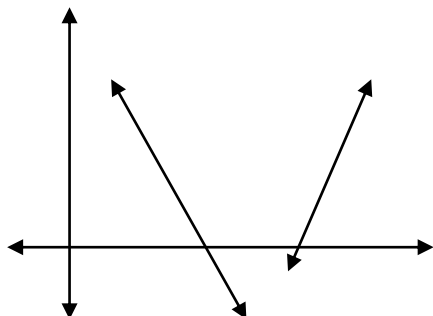


α : Medida del ángulo entre la recta $\mathcal{L}_1$ y el eje x.

β : Medida del ángulo entre la recta $\mathcal{L}_2$ y el eje x

PENDIENTE DE UNA RECTA

Se denomina pendiente de una recta a la tangente trigonométrica de la medida del ángulo formado por la recta y el eje x.



Convencionalmente la pendiente de una recta se denota con la letra "m" minúscula.

En la figura:

- Sea "m" la pendiente de la recta $\mathcal{L}$

Luego $m = \tan$

Si $\alpha < 90^\circ$; entonces m es positiva

- Sea m_1 la pendiente de la recta $\mathcal{L}_1$

Luego $m_1 = \tan \beta$

Si $\beta > 90^\circ$; entonces m_1 es negativa

CÁLCULO DE LA PENDIENTE

La pendiente de una recta puede ser calculado conociendo las coordenadas de dos puntos de dicha recta.

En la figura:

Sea la recta $\mathcal{L}$ cuya pendiente es m

Luego: $m = \tan \alpha$

En el $\triangle AMB$: $\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Entonces: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

CÁLCULO DE LA MEDIDA ANGULAR ENTRE DOS RECTAS

Sean:

- $\mathcal{L}_1$: cuya pendiente es m_1
- $\mathcal{L}_2$: cuya pendiente es m_2

Luego: $m_1 = \tan \beta$, $m_2 = \tan \alpha$

$\triangle ABC$: Propiedad: $\theta = \alpha - \beta$

Luego $\tan \theta = \tan(\alpha - \beta)$

$$\tan \theta = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

Reemplazando $\tan \alpha = m_2$ y $\tan \beta = m_1$

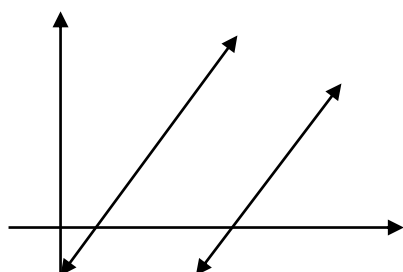
Se tiene:

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \dots\dots (1)$$

NOTA:

Analizando la expresión 1 se tiene:

- a) Si $\theta = 0^\circ \Rightarrow m_1 = m_2$
 Esto quiere decir que las rectas son paralelas

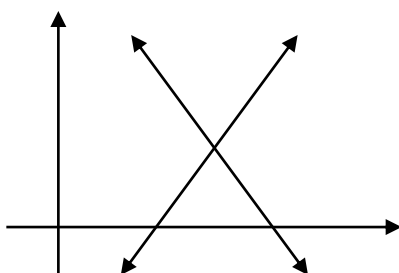


En la figura:

Si: $L_1 \parallel L_2 \Rightarrow m_1 = m_2$

m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas L_1 y L_2 respectivamente

- b) Si $\theta = 90^\circ \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$
 Esto quiere decir que las rectas son perpendiculares



En la figura:

Si: $L_1 \perp L_2 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

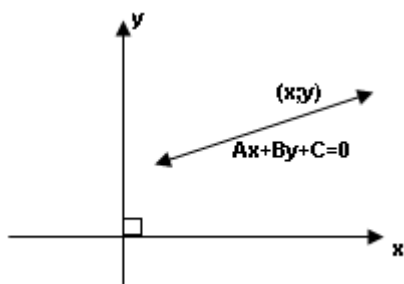
m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas L_1 y L_2 respectivamente

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS VARIABLES

La ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ representa geoméricamente la ecuación de una recta, así tenemos:

FORMA DE LA ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA

Toda ecuación lineal de la forma $Ax + By + C = 0$, se denomina ecuación lineal en variables x e y o de primer grado donde (x,y) pertenece a dicha recta. Esto es la ecuación general de una recta, se cumple para todo valor de x e y que satisface dicha ecuación.



Del gráfico:

$$\mathbb{L}: Ax + By + C = 0$$

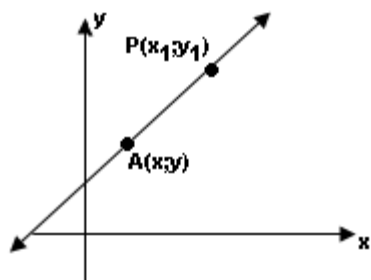
Ecuación general

Donde: A, B y C son constantes, siendo m su pendiente

$$\Rightarrow m = \frac{A}{B}$$

FORMA DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA DADO UN PUNTO Y SU PENDIENTE

La ecuación de una recta que pasa por un punto $P(x_1, y_1)$ y tiene una pendiente m es: $y - y_1 = m(x - x_1)$



Sea $A(x,y) \in \mathbb{L}$, luego
Por cálculo de la pendiente

$$\mathbb{L} : m = m = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Luego:

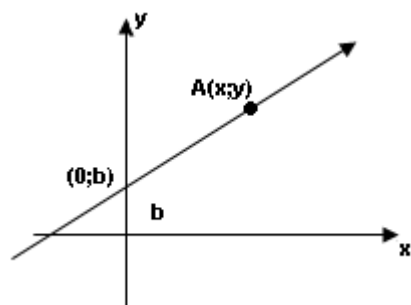
$$\mathbb{L} : y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{Ecuación punto pendiente}$$

Donde:

$P(x_1; y_1)$: punto de paso
 $A(x;y)$: punto genérico
m : pendiente

FORMA DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA DADO SU PENDIENTE Y SU ORDENADA AL ORIGEN

La ecuación de la recta que pasa por $(0;b)$ y tiene una pendiente m es $y = mx + b$



Por la ecuación punto – pendiente

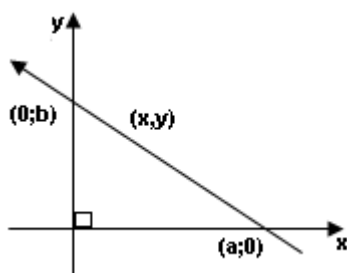
$$\Leftrightarrow \mathcal{L} : y - b = m(x - 0)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L} : y = mx - b \text{ ecuación y –intercepto o ecuación de pendiente y ordenada al origen}$$

m: pendiente de la recta $\mathcal{L}$

FORMA DE LA ECUACIÓN DE UNA RECTA DE COORDENADAS AL ORIGEN

La ecuación de la recta que pasa por $(0; b)$ y $(a; 0)$ es: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$



En la figura:

$$\mathcal{L} : m = \frac{0 - b}{a - 0} \Rightarrow m = -\frac{b}{a}$$

Aplicando la ecuación de pendiente y ordenada al origen

$$\mathcal{L} : y = mx + b \dots\dots\dots(1)$$

Reemplazando m en (1)

$$\mathcal{L} : y = -\frac{b}{a}x + b$$

Luego:

$$\mathcal{L} : \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \text{ ecuación de coordenadas al origen}$$

FORMA DE LA ECUACIÓN SIMÉTRICA DE LA RECTA

Del gráfico:

$$\mathcal{L} : \frac{y - y_1}{l} = \frac{x - x_1}{n} \quad \text{ecuación simétrica de la recta}$$

Nota:

Dado la ecuación de una recta $y = mx + b$, analice los siguientes casos y haga su gráfica.

Si $b = 0$ y la pendiente m es positiva o negativa

Si $x = 0$ y b es positiva o negativa

Si: $y = 0$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Sea $\mathcal{L}$ una recta cuya ecuación es de la forma $Ax + By + C = 0$ y un punto $P(x_1; y_1)$ que no pertenece a dicha recta, luego la distancia del punto P a la recta $\mathcal{L}$ está dada por:

Del gráfico:

$$d(p, \mathcal{L}) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$d(p, \mathcal{L})$: distancia del punto P a la recta $\mathcal{L}$

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

Sean las rectas paralelas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ cuyas ecuaciones son:

$$\mathcal{L}_1 : Ax_0 + By_0 + C_1 = 0 \text{ y}$$

$$\mathcal{L}_2 : Ax_0 + By_0 + C_2 = 0$$

Luego la distancia entre dichas rectas está dado por:

Del gráfico:

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

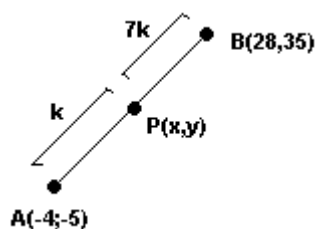
- ¿Cuál es la distancia entre $P(-3, -2)$ y $Q(1; 1)$?

Resolución:

- Se tiene tres puntos $A(2; 3)$, $B(-4; 7)$ y $C(0; -3)$. Indicar que tipo de triángulo se forma

Resolución:

- Del gráfico, calcular: $x + y$



Resolución:

4. Los puntos $A = (1;1)$; $B = (-3;-1)$ y $C = (4; y)$, son vértices de un triángulo rectángulo. Hallar "y"

Resolución:

5. Hallar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos formado por las rectas:

$$L_1: 7x - y + 7 = 0$$

$$L_2: x - y + 1 = 0$$

Resolución:

6. Determinar el área de la región limitada por las rectas: $y - x - 6 = 0$; $y + x - 12 = 0$ y el eje de abscisas

Resolución:

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

- Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3,1)$ y $(-5,4)$
- Si las rectas $2x + ay = 4$ y $3x - y = 6$ son paralelas. Hallar "a"
 - $-3/2$
 - $-2/3$
 - $-1/2$
 - -2
 - -3
- Hallar "K" y "S" de manera que las ecuaciones: $9y + kx + (k - 3) = 0$ y $ky + 4x + s = 0$ representan la misma recta
 - $(+5;-5)$
 - $(-6;-6)$
 - $(-2;3)$
 - $(-4;-6)$
 - $(6;-5)$
- Encontrar la distancia de cada uno de los puntos $P_1(3,-5)$, $P_2(-4,1)$ y $P_3(9,0)$ a la recta $12y = 5x - 26$
- En el triángulo: $A(11;-3)$; $B(-5,9)$; $C(-10;-6)$. Calcular la longitud de las tres alturas.

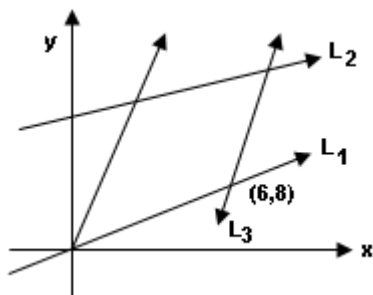
AB: $3x + 4y - 21 = 0$

BC: $3x - y + 24 = 0$

CA: $-x + 7y + 32 = 0$
- Hallar la ecuación de la recta que esta situada a 6 unidades del origen, que pasa por $(10;0)$ y que corta a la parte positiva del eje y
- Hallar el área del paralelogramo de la figura mostrada si:

$$L_1: 3y - 4x = 0; L_2: 3y - 4x - 14 = 0 \text{ y}$$

$$L_3: x + by + c = 0$$



- Desde el punto $(2,-3)$ se traza la perpendicular a la recta $3x - 4y + 6 = 0$; a que distancia se halla dicha perpendicular del punto $(6,8)$
 - $5/39$
 - $11/39$
 - $49/5$
 - $59/5$
 - $12/5$

9. Hallar la ecuación de la recta cuyos puntos equidistan de las rectas paralelas $12x - 5y + 7 = 0$; $12x - 5y - 2 = 0$
10. El punto $A = (3;9)$ es uno de los vértices del triángulo ABC y las ecuaciones de dos de sus medianas son $L_1: y - 6 = 0$ y $L_2: 3x - 4y + 9 = 0$ determinar las coordenadas de los otros dos vértices.