Ayuda para Docentes

QUINTO SECUNDARIA

TRIGONOMETRIA

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

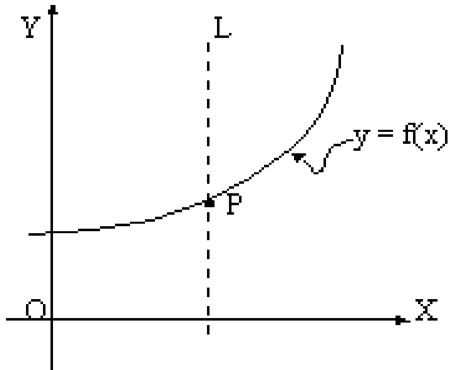
FUNCIONES

DEFINICIÓN: Sean A y B dos conjuntos no vacíos, llamaremos función de A en B a toda relación f contenida en AxB, tal que cumple con la condición: "Para cada **x** en A, existe UNO y SÓLO UN elemento **y** en B, tal que (x;y) $\in f$.

$$\text{"}f \text{ es una función} \Leftrightarrow \forall\ x \in A,$$
$$\exists \text{ un único } y \in B, \text{ tal que } (x;y) \in f\text{"}$$

Observación:

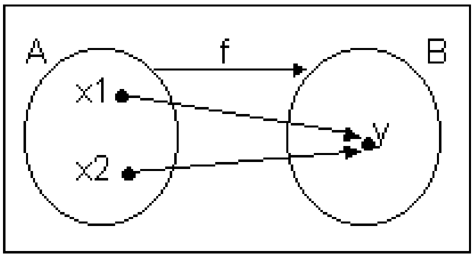
a) Una consecuencia inmediata de la definición es que geométricamente f es una función, si cualquier recta perpendicular al eje X corta a la gráfica de f en un solo punto.



f(x) es función

2. NOTACIÓN Y REPRESENTACIÓN: Una función f de A en B, se denota por:

$$f: A \to B$$



"f={(x1;y), (x2;y)} es función, pues todo elemento de A está relacionado con un único elemento y de B"

3. DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN: Dado dos conjuntos A, "de partida", y B, "de llegada", se llama **DOMINIO** de la función **f** al conjunto de los elementos **x** $\in$ A, que mediante "f" le hace corresponder un único elemento **y** $\in$ B [**y** se llama imagen de **x** mediante **f** y se denota por **y = f(x)**], y **RANGO** de la función al conjunto de los elementos **y** $\in$ B, que son imágenes de los elementos **x** $\in$ A.

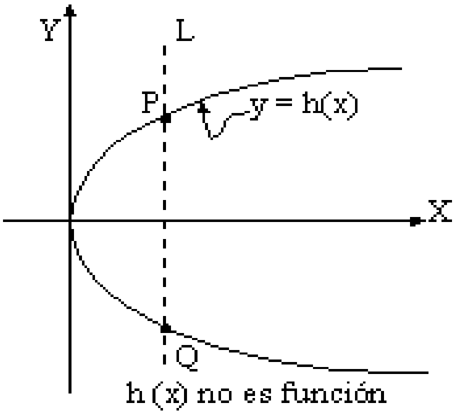
$$\text{Domf= Df= } \{x \in A \,/\, (x;y) \in f\} = A$$
$$\text{Ranf= Rf= } \{y \in B \,/\, (x;y) \in f\} = B$$

Según lo anterior, la función "f" puede escribirse como:

$$\mathbf{f}= \{(x;y) \ / \ y=f(x),\ x \in Df=A\}$$

NOTA: A la relación y=f(x) se le llama regla de correspondencia entre la variabledependiente "y" y la variable independiente "x"

Ponte Mosca: La siguiente gráfica no es función:



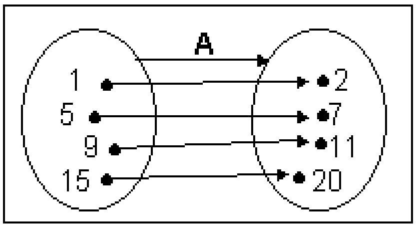
Ejemplos: Decir si los siguientes conjuntos son funciones, si es así dar su dominio y rango:

1. A={(1;2), (5;7), (9;11), (15;20)}

Sol.: **A sí es** una **función**

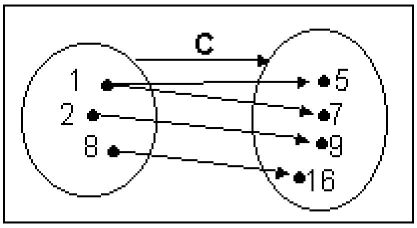
Dom A ={1, 5, 9, 15}

Ran A={2, 7, 11, 20}



2. C={(1;5), (2;9), (1;7), (8;16)}

Sol.: **C no es** una **función** porque existen dos pares ordenados (1;5) y (1;7) con una misma primera componente.



3. Sea F={(x;y)/ y =x^2 + 2, x∈{1,2,3,4}}

Sol.: **F si es** una **función**

Si x = 1 ⇒ y = 1^2 + 2 = 3

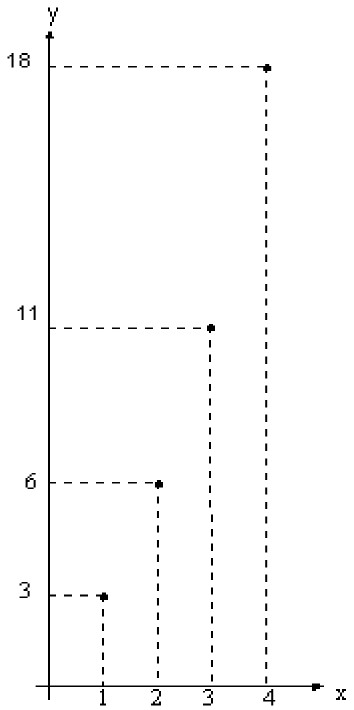
Si x = 2 ⇒ y = 2^2 + 2 = 6

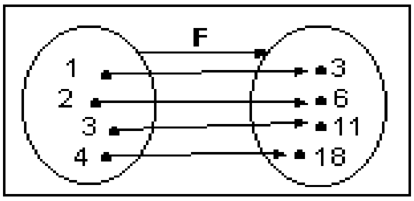
Si x = 3 ⇒ y = 3^2 + 2 = 11

Si x = 4 ⇒ y = 4^2 + 2 = 18

Luego:

F = ={(1;3), (2; 6), (3; 11), (4; 18)}
Dom F ={1;2;3;4}
Ran F={3; 6; 11; 18}





GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN: La gráfica de una función es la representación geométrica del conjunto de pares ordenados que define la función.

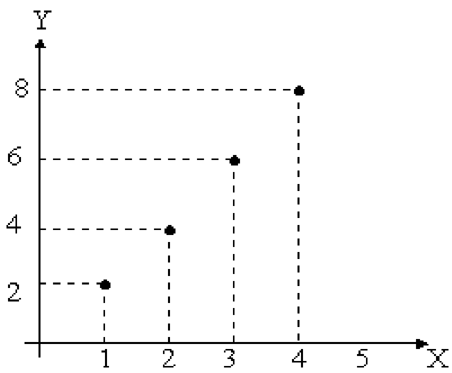
Graf f = { (x;y)/ y=f(x), x$\in$ Df}

A los pares ordenados (x;y) se les considera como puntos del plano R^2

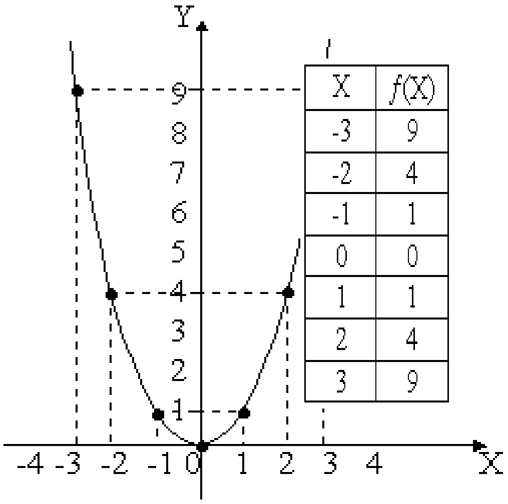
Ejemplos:

1. Grafica la función: f(x)={(1;2),(2;4),(3;6),(4;8)}

Solución



el dominio y el rango.



X	f(X)
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Dominio de f : $\langle -\infty; +\infty \rangle$

Rango de f : $[0; +\infty\rangle$

CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES: Las funciones se clasifican de acuerdo a ciertas características:

1. De acuerdo a las operaciones indicadas:

a) **Funciones algebraicas:** Son aquellas formadas por un número finito de operaciones algebraicas.

Ejemplos: $f(x)=(x^2-1)^2/\sqrt{x}$; $g(x)=5x+3$

b) **Funciones trascendentales:** son aquellas que no son algebraicas. Por ejemplo las Trigonométricas, Logarítmicas y Exponenciales.

Ejemplos: $f(x)=\text{Sen}x$; $g(x)=\text{Ln}x$; $h(x)=e^{x}-1$

2. De acuerdo a como están escritas:

a) **Explícitas:** Cuando una variable está expresada en términos de la otra.

Ejemplos: $y = x^2 + 2x + 1$; $y = \text{Tg}x$

b) **Implícitas:** Cuando una variable no está expresada en términos de la otra.

Ejemplos: $xy + 1 = 0$; $x^6 + 2x = y^3 + y$

3. De acuerdo a su variación:

a) Creciente: Es creciente en un intervalo, cuando al aumentar el valor de una variable la otra también aumenta.

Ejemplo: $y = \sqrt{x}$

x	0	1	4	9	16	25
y	0	1	2	3	4	5

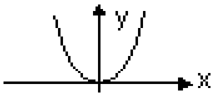
b)) Decreciente: Es decreciente en un intervalo cuando al aumentar el valor de una variable la otra disminuye.

Ejemplo: $y = 1/x$

x	1	2	4	8	..
y	1	0,5	0,25	0,125	..

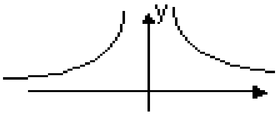
4. **De acuerdo a su continuidad:**

a) Continua: Cuando al trazar su curva,ésta se realiza mediante un trazo ininterrumpido.



Ejemplo:
$y = x^2$

b) Discontinua: Cuando al trazar su gráfica,ésta presenta saltos o interrupciones.



Ejemplo:
$y = 1/x^2$

5. Funciones especiales:

a) Biyectiva: Cuando a cada elemento del rango le corresponde un solo valor del dominio.

Ejemplo: • $y = \sqrt{x} \Rightarrow$ Es biyectiva
Si $y = 2 \Rightarrow x = 4$
• $y = x^2 \Rightarrow$ No es biyectiva
Si $y = 4 \Rightarrow x = 2$ ó $x = -2$

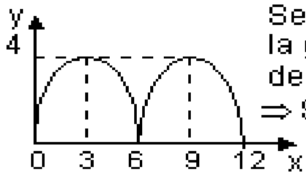
b) Par e Impar: Dada una función $y=f(x)$
Es **Par** si : $f(-x) = f(x)$
Es **Impar** si : $f(-x) = -f(x)$

Ejemplo: • $f(x) = x^4 - x^2 + 3 \Rightarrow$ Es **Par**
ya que $f(-x)=(-x)^4 - (-x)^2+3 = x^4-x^2+3 = f(x)$
• $g(x) = x^3 + x \Rightarrow$ Es **Impar**
ya que $g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3-x = -g(x)$

c) **Periódica:** Dada una función f con dominio D, se dice que dicha función es periódica si existe algún número positivo T tal que:

$f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in D$

En la figura adjunta se muestra una función periódica. Determina el período de la función.



Se observa que la gráfica apartir de x=6 se repite
$\Rightarrow$ Su período es 6

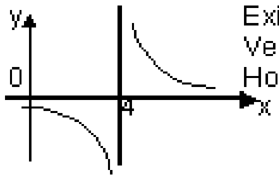
<u>ASÍNTOTAS:</u> Son rectas en las cuales la curva o función se aproxima pero sin llegar a interceptar. Pueden ser:

a) Horizontales: Si es paralela o coincide con el eje x.

b) Verticales: Si es paralela o coincide con el eje y.

c) Oblicuas: Si no es paralela a los ejes x e y. Ejemplo: $y = 1/(x-4)$

Ejemplo:
Hallar las asíntotas de: $y = 1/(x-4)$



Existen dos asíntotas
Vertical: $x = 4$
Horizontal: $y = 0$

CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTOS

1. ¿Cuál o cuáles de los siguientes conjuntos son funciones?
   A = {(1,3)(3,7)(5,9)}
   B = {(1,3)(2,5)(4,7) (1,3)}
   C = {(1,5)(-1,2)(3,4) (4,3) (5,7)}
   D = {(2,5)(3,7)(4,9)(3,9)}
2. Determinar si el siguiente conjunto es función, si es así indicar la suma de los valores del dominio y rango respectivamente
   P = {(1,2)(5,-3)(3,3)(-2,5)}
3. Hallar el rango de la función:

   $f = \{(x,y)/\ y = x + 2\};\ x \in \{0,1,2,3\}$

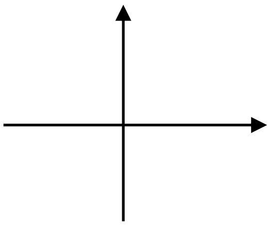
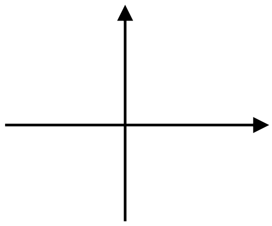
4. Hallar el dominio y el rango de:

   a) $y = \dfrac{x+4}{3}$ b) $y = \sqrt{x-3}$

5. Determinar el rango en:

   f = $\{(x,y) / y = \sqrt{x-2}\}$

6. Reconocer que gráficas pertenecen a una función:

7. Dada la función:
   f = $\{(x,y)/\ 3x + 2y = 4,\ x \in R\}$
   Escribir f de modo que su regla de correspondencia sea de la forma: y = f(x), luego calcular f $\left(\frac{1}{3}\right)$

8. Dada la función:
   f = $\{(x,y)/\ y = x^3 + 2\}$
   Hallar el valor del dominio cuya imagen correspondiente es 10

9. El máximo valor de:
   N = Sen α - Cos θ es:
10. ¿Cuál o cuáles de las siguientes funciones son trascendentales?
   I. $f_{(x)} = m^2 + 3m + 1$
   II. $g_{(x)} = Cos^2 x + 3Senx$
   III. $h_{(x)} = \sqrt{Lnx+5}$
11. Graficar:
   f = $\{(x,y)/\ y = x^2 - 1,\ x \in R\}$
   y determinar su dominio y rango
12. Hallar el dominio y el rango en:
   a) $f_{(x)} = \sqrt{x^2-4x+3}$
   b) $f_{(x)} = \sqrt{\dfrac{x}{4-x^2}}$

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1. Dada la función

   f = $\{(2,2)(4,3)(2,a+1)(4,b-1)\ (5,\sqrt{a})\ (6;\sqrt{8-b})\}$
   Hallar: a + b
   a) 2 b) 3 c) 4
   d) 5 e) n.a

2. Hallar el dominio de:

   $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 7x - 8}}$

   a) R-{1} b) R-[-1,8] c) R
   d) R-{8} e) n.a

3. Hallar el dominio y rango de:

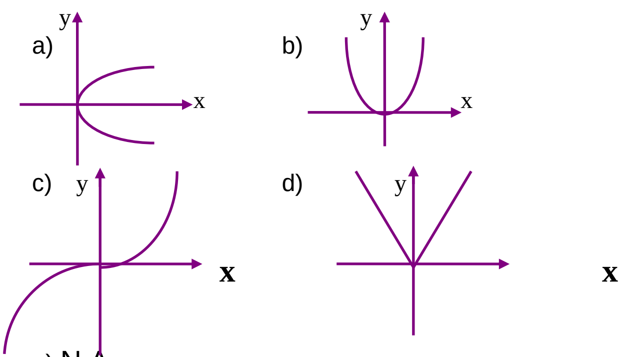
   $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

   a) [0,α> b) [0,2] c) [2,+α>
   d) [0,-2] e) n.a

4. Hallar el rango de la función:
   F = {(x;y) / y = x^2 + 2, x∈{1,2,3,4}}.

   a) {3,6,11,12} b) {4,6,10,11}
   c) {1,2,3,4} d) {1,2,3,5}
   e) {3,6,11,18}

5. La gráfica de la siguiente función que forma tiene: f (x) = x^2



   e) N.A.

6. Decir cuál o cuáles de los siguientes conjuntos son funciones:
   A = {(1;2), (5;7), (9;11), (15;20)}
   B = {(1;5), (2;9), (1;7), (8;16)}
   C = {(1;3), (2;4), (-1;4); (-2;2)}

   a) A y B b) solo C c) solo A
   d) A y C e) N.A

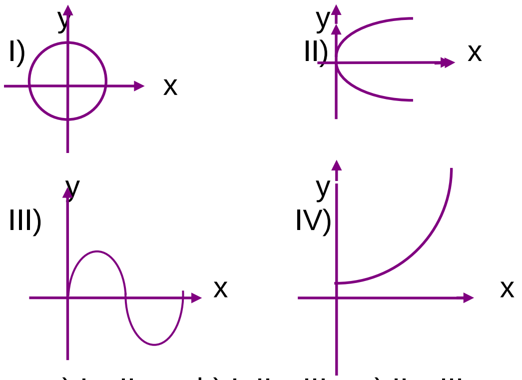
7. Decir si el siguiente conjunto es función, si es así debe indicar la suma de los valores del dominio y Rango respectivamente.
   A = { (2;1), (-1;5), (3;3), (-2;5)}

   a) No es función
   b) Si es función; 2;14
   c) Si es función; 2;9
   d) Si es función, 9,2
   e) Si es función, 14,2

8. Determinar el dominio de las siguientes funciones:
   I) $F_1 = \{(x;y)/y=\sqrt{x}\}$
   II) $F_2 = \{(x;y)/y = x^2\}$

   a) $[0; +\infty\rangle, [0; +\infty\rangle$ b) $[0; +\infty\rangle, \langle-\infty; 0]$
   c) $[0; +\infty\rangle, \langle-\infty; +\infty\rangle$ d) $\langle-\infty; o]$, $\langle-\infty; 0]$
   e) N.A.

9. ¿Cuál de los siguientes gráficos no representa una función?:



   a) I y II   b) I, II y III   c) II y III
   d) I y IV   e) N.A

10. ¿Cuál o cuales de las siguientes funciones son Trascendentales?
   I. $f(x) = x^2 + 2x +1$
   II. $g(x) = Sen^2x + 3Cosx$
   III. $h(x) = \sqrt{} Lnx + 10$
   a) Sólo I   b) Sólo II   c)Sólo III
   d) I y II   e)II y III

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se llama Función Trigonométrica (F.T.) al conjunto de pares ordenados (x; y) donde los primeros elementos son números reales (ángulos en grados sexagesimales o radianes) y los segundos elementos corresponden a los valores de las razones trigonométricas de esos ángulos.

Ejemplo:

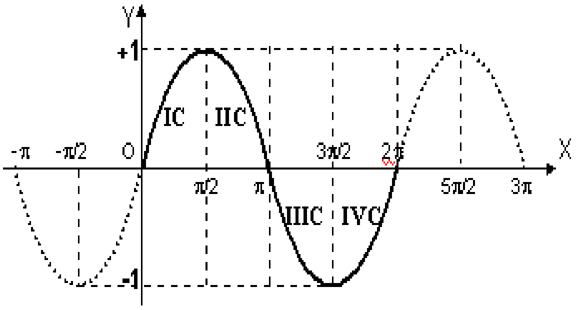
$\mathbf{f} = \{(x; y) / y = \text{Sen } x,\ x \in \mathbf{R}\}$

Donde:
x$\rightarrow$ Variable independiente
y $\rightarrow$ Variable dependiente
y = Sen x$\rightarrow$ Regla de correspondencia

Esta regla de correspondencia origina un conjunto de pares ordenados, el cual le da el nombre a la F.T., la cual a su vez tendrá un dominio, un rango, una gráfica y una periodicidad.

GRÁFICA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1) FUNCIÓN SENO: {(X;Y)/Y=Senx}



Dominio: **R** ó ⟨-∞;+∞⟩

Rango: [-1:1] Período: 2π

PROPIEDADES:

i) Signo de la función: Es positiva en el intervalo ⟨0 ; π⟩ y negativa en ⟨π ; 2π⟩.

ii) Puntos donde se anula: Se anula en los puntos x = **kπ** donde k∈ℤ.

iii) Simetría: Es una función impar, ya que es simétrica respecto del origen al cumplirse que:

Sen(-x) = - Senx

iv) Intervalos de crecimiento: En el intervalo [0 ; 2π] se tiene:

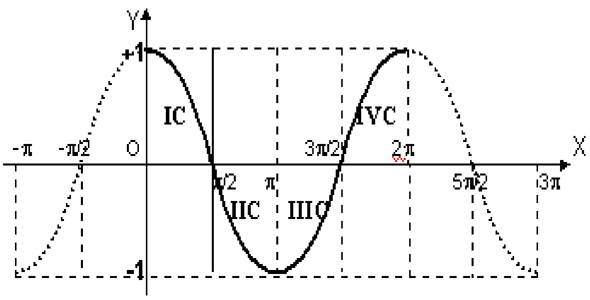
-Es creciente en los intervalos:
[0 ; π/2] y [3π/2; 2π]

-Es decreciente en el intervalo:
[π/2; 3π/2]

v) Extremos relativos:
-Alcanza un máximo en el punto:
(π/2 ; 1)
-Alcanza un mínimo en el punto:
(3π/2 ; -1)

vi) Continuidad: Es una función continua en **R.**

2) FUNCIÓN COSENO: {(X;Y)/Y=Cosx}



Dominio: **R** ó ⟨-∞;+∞⟩

Rango: [-1:1] Período: 2π

PROPIEDADES:

i) **Signo de la función:** Es positiva en los intervalos $\langle 0;\pi/2\rangle$ y $\langle 3\pi/2 ; 2\pi\rangle$ y negativa en los intervalos $\langle \pi/2 ; \pi\rangle$ y $\langle \pi ; 3\pi/2\rangle$

ii) **Puntos donde se anula:** Se anula en los puntos x=**π/2+kπ** donde $k\in\mathbb{Z}$.

iii) **Simetría:** Es una función par, ya que es simétrica respecto del eje de las ordenadas al cumplirse que:

Cos(-x) = Cos x

iv) **Intervalos de crecimiento:** En el intervalo $[0 ; 2\pi]$ se tiene:

-Es decreciente en: $[0 ; \pi]$

-Es creciente en: $[\pi; 2\pi]$

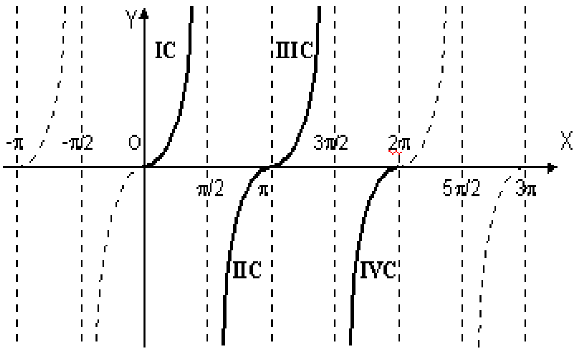
v) **Extremos relativos:**

-Alcanza un máximo en: (0 ; 1)

-Alcanza un mínimo en:$(\pi ; -1)$

vi) **Continuidad:** Es una función continua en **R.**

3) FUNCIÓN TANGENTE: **{(X;Y)/Y=Tgx}**



Dominio: **R** -$\{(2k+1)\pi/2\}$ donde **k**$\in$**Z**

Rango: **R** ó $\langle -\infty;+\infty\rangle$

Período: π

PROPIEDADES:

i) **Signo de la función:** Es positiva en los intervalos $[0;\pi/2\rangle$ y $[\pi ; 3\pi/2\rangle$ y negativa en los intervalos $\langle \pi/2 ; \pi]$ y $\langle 3\pi/2 ; 2\pi]$

ii) **Puntos donde se anula:** Se anula en los puntos x = **kπ** donde $k\in\mathbb{Z}$.

iii) **Simetría:** Es una función impar, ya que es simétrica respecto del origen al cumplirse que:

Tg(-x) = -Tg x

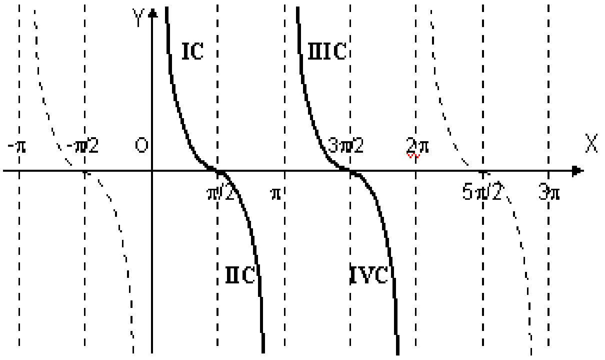
iv) **Intervalos de crecimiento:** En el intervalo $[0 ; 2\pi]$ se tiene:

-Es creciente en: $[0; \pi/2\rangle$, $\langle \pi/2;3\pi/2\rangle$ y $\langle 3\pi/2; 2\pi]$.

v) **Extremos relativos:** No tiene ya que su rango es **R.**

vi) Continuidad: Es discontinua en los puntos x = **π/2 + kπ** donde k∈ℤ.

4) <u>FUNCIÓN COTANGENTE:</u> {(X;Y)/Y=Ctgx}



Dominio: **R** -{kπ} donde **k∈Z**
Rango: **R** ó ⟨-∞;+∞⟩
Período: π

<u>PROPIEDADES:</u>

i) Signo de la función: Tiene el mismo signo que la función tangente, es decir es positiva en los intervalos ⟨0;π/2] y ⟨π ; 3π/2] y negativa en los intervalos [π/2 ; π⟩ y [3π/2 ; 2π⟩.

ii) Puntos donde se anula: Se anula en x = **π/2 + kπ** donde k∈ℤ.

iii) Simetría: Es una función impar, ya que es simétrica respecto del origen al cumplirse que:

Ctg(-x) = -Ctg x

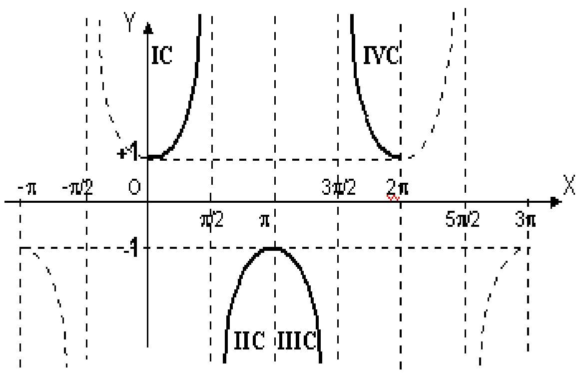
iv) Intervalos de crecimiento: En el intervalo [0 ; 2π] se tiene:

-Es decreciente en: ⟨0;π⟩ y ⟨π; 2π⟩

v) Extremos relativos: No tiene ya que su rango es **R.**

vi) Continuidad: Es discontinua en los puntos x = **kπ** donde k∈ℤ.

5) <u>FUNCIÓN SECANTE:</u> {(X;Y)/Y=Secx}



Dominio: **R** -{(2k+1)π/2} donde **k∈Z**
Rango: **R-** ⟨-1:1⟩
Período: 2π

PROPIEDADES:

i) Signo de la función: Tiene el mismo signo que la función Coseno, es decir es positiva en los intervalos [0;π/2⟩ y ⟨3π/2 ;2π] y negativa en los intervalos ⟨π/2; π] y [π; 3π/2⟩.

ii) Puntos donde se anula: No se anula en ningún punto

iii) Simetría: Es una función par, ya que es simétrica respecto del eje "y" al cumplirse que:

Sec(-x) = Sec x

iv) Intervalos de crecimiento: En el intervalo [0 ; 2π] se tiene:

-Es creciente en: [0;π/2⟩ y ⟨π/2 ;π]

-Es decreciente en: [π; 3π/2⟩ y ⟨3π/2; 2π]

v) Extremos relativos: No tiene ni máximos ni mínimos absolutos, sin embargo se puede decir que:

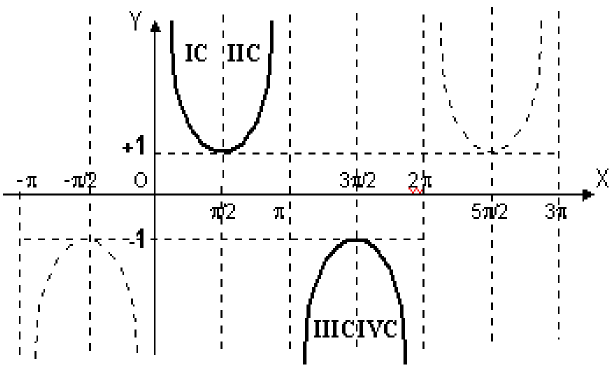
-En el intervalo ⟨π/2 ; 3π/2⟩ alcanza un máximo relativo en el punto:
(π/2 ; -1)

-En el intervalo [0;π/2⟩ Alcanza un mínimo relativo en el punto: (0 ; 1)

-Y en el intervalo ⟨3π/2;2π] alcanza un mínimo relativo en el punto:
(2π ; 1)

vi) Continuidad: Es discontinua en los puntos x = **π/2 + kπ** donde k∈ℤ.

6) <u>FUNCIÓN COSECANTE:</u>{(X;Y)/Y=Cscx}



Dominio: **R** -{kπ} donde **k**∈**Z**
Rango: **R-** ⟨-1:1⟩
Período: 2π

PROPIEDADES:

i) Signo de la función: Tiene el mismo signo que la función Seno, es decir es positiva en el intervalo ⟨0 ; π⟩ y negativa en ⟨π ; 2π⟩.

ii) Puntos donde se anula: No se anula en ningún punto

iii) Simetría: Es una función impar, ya que es simétrica respecto del origen al cumplirse que:

Csc(-x) = -Csc x

iv) Intervalos de crecimiento: En el intervalo [0 ; 2π] se tiene:

-Es decreciente en: ⟨0;π/2] y [3π/2;2π⟩

-Es creciente en: [π/2; π⟩ y ⟨π; 3π/2]

v) Extremos relativos: No tiene ni máximos ni mínimos absolutos, sin embargo se puede decir que:

-En el intervalo ⟨0 ; π⟩ alcanza un mínimo relativo en el punto:
(π/2 ; 1)

-Y en el intervalo ⟨π ; 2π⟩ alcanza un máximo relativo en el punto:
(3π/2 ; -1)

vi) Continuidad: Es discontinua en los puntos x = **kπ** donde k∈ℤ.

I- CUADRO DE VARIACIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Angulo / Cuad. / F.T.	0° 2kπ	IC		90° (4k+1)π/2	IIC		180° (2k+1)π	IIIC		270° (4k+3)π/2	IVC		360° (2k+2)π
Sen	0	+	↑	1	+	↓	0	−	↓	−1	−	↑	0
Cos	1	+	↓	0	−	↓	−1	−	↑	0	+	↑	1
Tg	0	+	↑	$+\infty$ / $-\infty$	−	↑	0	+	↑	$+\infty$ / $-\infty$	−	↑	0
Ctg	$-\infty$ / $+\infty$	+	↓	0	−	↓	$-\infty$ / $+\infty$	+	↓	0	−	↓	$-\infty$ / $+\infty$
Sec	1	+	↑	$+\infty$ / $-\infty$	−	↑	−1	−	↓	$-\infty$ / $+\infty$	+	↓	1
Csc	$-\infty$ / $+\infty$	+	↓	1	+	↑	$+\infty$ / $-\infty$	−	↑	−1	−	↓	$-\infty$ / $+\infty$

II- PERIODICIDAD

Sabemos que el periodo mínimo de las funciones Senx, Cosx, Secx, y Cscx es 2π y de las funciones Tgx y Ctgx es π.

Dicho período solo variará si ocurre alguno de los siguientes casos:

I) Si multiplicamos al argumento por una constante.
II) Si elevamos a la función a una potencia determinada.

Observaciones Finales:

- Si sumamos, restamos multiplicamos, dividimos o elevamos a una potencia (positiva) a algunas de las F.T., es posible que varíe su **RANGO**. El DOMINIO no varía en estos casos.

- Si sumamos, restamos multiplicamos o dividimos el argumento de alguna de las F.T., es posible que varíe su **DOMINIO**. El RANGO no varía en estos casos.

REGLAS PRÁCTICAS PARA EL CÁLCULO DEL DOMINIO, RANGO Y PERIODICIDAD DE UNA F.T.

Sea: $f(x) = \pm A\ \mathbf{F.T.}^{\,n}(Bx + C) + D$

Donde:
F.T. : Función Trigonométrica básica
A, B, C y D: Son constantes que $\in$ **R**
± : Signo de la Constante A
n: Exponente de la F.T. que $\in \mathbf{Z}^{+}$
x : Argumento o variable.
f(x): Regla de correspondencia

I) Para el cálculo de la Periodicidad:

a) Para las F.T. Seno, Coseno Secante o Cosecante:

Si **n** es Par $\Rightarrow$ Período = π /B

Si **n** es Impar $\Rightarrow$ Período = 2π /B

b) Para las F.T. Tangente ó Cotangente:

Si **n** es Par ó Impar $\Rightarrow$ Período= π /B

Ejemplos:
Halla los Períodos de las siguientes funciones:
a) $y = 2 + 4Sen\ (3x - 10°)$
b) $y = 5 - 3Cos^4\ (2x + 25°)$
c) $y = -7Tg\ (\pi/4 - 8x) + 6$
d) $y = 12 + 5Ctg^6\ (7\pi/8 - x/5)$
e) $y = 3Sec^3\ (30° - 4x) + 8$
f) $y = 2Csc^2\ (30° - 3x/7) + 8$
g) $y = 2 + 6Sen(4x + \pi/3)$
$- 7Cos(45° - 5x)$
h) $y = 2Tg(3x/2 + 5°)$
$+ 3Csc^2(4x/5 - 15°) - 3$

Solución

a) Como la F.T. básica es el Seno, el exponente es impar (n=1) y B=3. Entonces el período "p"es:

$$p = 2\pi/B = \mathbf{2\pi/3}$$

b) Como la F.T. básica es el Coseno, el exponente es par (n=4) y B=2. Entonces el período "p"es:

$$p = \pi/B = \mathbf{\pi/2}$$

c) Como la F.T. Tangente es una función impar [Tg(-x) = -Tgx]. Observe que la función se puede transformar a lo siguiente:
$y = -7Tg\ (\pi/4 - 8x) + 6$
$y = 7Tg[-(\pi/4 - 8x)] + 6$
$y = 7Tg\ (8x - \pi/4) + 6$

Como la F.T. básica es la Cotangente y B=|-8|=8 Entonces el período "p"es:

$p = \pi/B = \boldsymbol{\pi/8}$

d) Como la F.T. Cotangente es una función impar [Ctg (-x)= - Ctg x]. Observe que la función se puede transformar a lo siguiente:

$y = 12 + 5Ctg^6\,(7\pi/8 – x/5)$
$y = 12 + 5\{-Ctg[-(7\pi/8 – x/5)]\}^6$
$y = 12 + 5Ctg^6\,(x/5 - 7\pi/8)$

Como la F.T. básica es la Cotangente y B = |-1/5| = 1/5 Entonces el período "p" es:

$p = \pi/B = \pi / (1/5) = \boldsymbol{5\pi}$

e) Como la F.T. Secante es una función par [Sec(-x) = Sec x]. Observe que la función se puede transformar a lo siguiente:

$y = 3Sec^3\,(30° - 4x) + 8$
$y = 3Sec^3\,[-(30° - 4x)] + 8$
$y = 3Sec^3\,(4x – 30°) + 8$

Como la F.T. básica es la Secante, el exponente es impar (n=3) y B=|-4| = 4. Entonces el período "p"es:

$p = 2\pi/B = 2\pi/4 = \boldsymbol{\pi/2}$

f) Como la F.T. básica es la Cosecante, el exponente es par (n=2) y B=|-3/7| = 3/7. Entonces el período "p"es:

$p = \pi/B =\pi / (3/7) = \boldsymbol{7\pi /3}$

g) Para hallar el periodo de una F.T. compuesta primero se determinan los períodos de cada una de las componentes de la función y luego el período resultante será el m.c.m. de los períodos de las componentes. Esto es:

El periodo de: $6Sen(4x +\pi/3)$
Es : $p = 2\pi/4 = \pi /2$

El periodo de: $– 7Cos(45° - 5x)$
Es : $p = 2\pi/5 = 2\pi /5$

∴ El período resultante será:

$$m.c.m.\,(\pi/2;\, 2\pi/5) = \frac{m.c.m.\,(\pi\,;\, 2\pi)}{M.C.D.(2;\,5)} = \frac{2\pi}{1} = \boldsymbol{2\pi}$$

h) El periodo de: $2Tg(3x/2 + 5°)$
Es : $p = \pi / (3/2) = 2\pi /3$

El periodo de: $3Csc^2(6x/5 – 15°)$
Es : $p = \pi / (6/5) = 5\pi / 6$

∴ El período resultante será:

$$m.c.m.(2\pi/3;\, 5\pi/6) = \frac{m.c.m.\,(2\pi\,;5\pi)}{M.C.D.(3;6)} = \frac{\underline{\boldsymbol{10\pi}}}{\boldsymbol{3}}$$

II) Para el cálculo del RANGO:

Si **f(x) = F.T. (x)**
ó **f(x) = $F.T.^n$ (x)** donde **n** es impar

Entonces el Rango de f(x) será:
Para el Senx y el Cosx : [-1; +1]
Para la Tgx y Ctgx : R ó ⟨-∞; +∞⟩
Para la Secx y Cscx : R – ⟨-1; +1⟩
ó ⟨-∞; -1]∪[+1; +∞⟩

Si **f(x) = $F.T.^2$ (x)**
ó **f(x) = $F.T.^n$ (x)** donde n es par

Entonces el Rango de f(x) será:
Para el Sen^2x y el Cos^2x : [0; +1]
Para la Tg^2x y Ctg^2x : R^+ ó [0; +∞⟩
Para la Sec^2x y Csc^2x : [+1; +∞⟩

Sea: **f(x)** = ±A **F.T.** ^{n}(Bx + C) + D

a) Para las F.T. Seno o Coseno:
Si **n** es Impar
⇒ Rang f(x) = [D-A; D+A]

Si **n** es par
⇒ Rang f(x) = [D; D+A] ← Si A(**+**)

ó Rang f(x) = [D-A; D] ← Si A(**-**)

b) Para las F.T. Secante o Cosecante:
Si **n** es Impar
⇒ Rang f(x) =R - ⟨D-A; D+A⟩

Si **n** es par
⇒ Rang f(x)= [D+A; +∞⟩ ← Si A(**+**)
ó Rang f(x) = ⟨-∞ ; D-A] ← Si A(**-**)

c) Para las F.T. Tangente o Cotangente:
Si **n** es Impar
⇒ Rang f(x) = R ó ⟨-∞; +∞⟩

Si **n** es par
⇒ Rang f(x) = [D; +∞⟩ ← Si A(**+**)
ó Rang f(x) = ⟨-∞; D] ← Si A(**-**)

Ejemplos:
Halla los RANGOS de las siguientes funciones:
a) y = 2 + 4Sen (3x – 10°)
b) y = 5 – $3Cos^4$ (2x + 25°)
c) y = -7Tg (π/4 - 8x) + 6
d) y = -12 + $5Ctg^6$ (7π/8 – x/5)

e) $y = 3Sec^3 (30° - 4x) - 8$
f) $y = 2Csc^2 (30° - 3x/7) + 8$

Solución

a) Como la F.T. básica es el Seno, el exponente es impar (n=1), D= 2 y A=4 (con signo +). Entonces el RANGO es:

$$\begin{aligned} \text{Rang } y &= 2 + 4Sen(3x - 10°) \\ &= 2 + 4[-1;+1] \\ &= [2-4; 2+4] \\ &= \mathbf{[-2; 6]} \end{aligned}$$

Si utilizamos el método práctico:

$$\begin{aligned} \text{Rang } y &= [D - A ;D + A] \\ &= [2 - 4 ; 2 + 4] \\ &= \mathbf{[-2; 6]} \end{aligned}$$

b) Como la F.T. básica es el Coseno, el exponente es par (n=4), D= 5 y A=3 (con signo –). Entonces el RANGO es:

$$\begin{aligned} \text{Rang } y &= 5 - 3Cos^4 (2x + 25°) \\ &= 5 - 3[0;+1] \\ &= [5 - 3 ; 5 - 0] \\ &= \mathbf{[2; 5]} \end{aligned}$$

Si utilizamos el método práctico:

$$\begin{aligned} \text{Rang } y &= [D - A ;D] \\ &= [5 - 3 ; 5] \\ &= \mathbf{[2; 5]} \end{aligned}$$

c) Como la F.T. básica es la Tangente, el exponente es impar (n=1), D= 6 y A=7 (con signo –). Entonces el RANGO es:

$$\begin{aligned} \text{Rang } y &= -7Tg(\pi/4 - 8x) + 6 \\ &= -7\langle -\infty; +\infty\rangle +6 \\ &= [-7\infty + 6; +7\infty + 6\rangle \\ &= \mathbf{\langle -\infty; +\infty\rangle} \end{aligned}$$

Si utilizamos el método práctico:

$\text{Rang } y = \mathbf{\langle -\infty; +\infty\rangle}$

d) Como la F.T. básica es la Cotangente, el exponente es par (n = 6), D = –12 y A = 5 (con signo +). Entonces el RANGO es:

$$\text{Rang } y = -12 + 5Ctg^6 (7\pi/8 - x/5)$$

$$\begin{aligned} &= -12 + 5[0; +\infty\rangle \\ &= [-12 + 0; -12 + \infty\rangle \\ &= \mathbf{\langle -12; +\infty\rangle} \end{aligned}$$

Si utilizamos el método práctico:

$$\begin{aligned} \text{Rang } y &= \langle D;+\infty\rangle \\ &= \mathbf{\langle -12; +\infty\rangle} \end{aligned}$$

TRIGONOMETRIA

e) Como la F.T. básica es la Secante, el exponente es impar (n=3), D= -8 y A=3 (con signo +). Entonces el RANGO es:

Rang y = $3Sec^3$ (30° - 4x) – 8

$= 3\{\langle -\infty; -1] \cup [+1; +\infty\rangle\} - 8$
$= \langle -\infty; -3] \cup [+3; +\infty\rangle - 8$
$= \langle -\infty; -3-8] \cup [+3-8; +\infty\rangle$
$= \langle -\infty; -11] \cup [-5; +\infty\rangle$
$= \mathbf{R - \langle -11; -5\rangle}$

Si utilizamos el método práctico:
Rang y = $R - \langle D-A; D+A\rangle$
$= R - \langle -8-3; -8+3\rangle$
$= \mathbf{R - \langle -11; -5\rangle}$

f) Como la F.T. básica es la Cosecante, el exponente es par (n=2), D= 8 y A=2 (con signo +). Entonces el RANGO es:

Rang y = $2Csc^2$ (30° - 3x/7) + 8
$= 2[+1; +\infty\rangle + 8$
$= [2 + 8; +\infty\rangle$
$= \mathbf{[10; +\infty\rangle}$

Si utilizamos el método práctico:
Rang y = $[D + A; +\infty\rangle$
$= [2 + 8; +\infty\rangle$
$= \mathbf{[10; +\infty\rangle}$

III) Para el cálculo del DOMINIO: Básicamente el cálculo del Dominio es obviar de los números reales **R** los valores de la variable **x** donde la función se hace discontinua. Como las Funciones Seno y Coseno son continuas en todos los reales, su dominio será **R**, en cambio en las otras funciones se tiene discontinuidad para una serie de valores de la variable **x** los cuales se restarán de **R** para el cálculo de sus dominios.

Sea: $\boxed{f(x) = A\ \mathbf{F.T.}^{n}(\pm Bx + C) + D}$

a) Para las F.T. Seno o Coseno:
Dom f(x) = R ó $\langle -\infty; +\infty\rangle$

b) Para la F.T. Tangente o Secante:
Si B tiene signo **(+)**
$\Rightarrow$ Dom f(x) = $R - \{(2k+1).\dfrac{\pi}{2B} - \dfrac{C}{B}\}$

Si B tiene signo **(-)**
$\Rightarrow$ Dom f(x) = $R - \{(2k+1).\dfrac{\pi}{2B} + \dfrac{C}{B}\}$

c) Para la F.T. Cotangente o Cosecante:
Si B tiene signo **(+)**
$\Rightarrow$ Dom f(x) = $R - \{k.\dfrac{\pi}{B} - \dfrac{C}{B}\}$
Si B tiene signo **(-)** $\Rightarrow$ Dom f(x) = $R - \{k.\underline{\pi} + \underline{C}\}$

Ejemplos:
Halla los DOMINIOS de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2 + 4Sen\ (3x - 10°)$
b) $f(x) = 5 - 3Cos^4\ (2x + 25°)$
c) $f(x) = -7Tg\ (\pi/4 - 8x) + 6$
d) $f(x) = -12 + 5Ctg^6\ (7\pi/8 - x/5)$
e) $f(x) = 3Sec^3\ (4x - 30°) - 8$
f) $f(x) = 2Csc^2\ (30° - 3x/7) + 8$
g) $f(x) = 2Tg(3x/2 + 5°)$
$\qquad + 3Csc^2(4x/5 - 15°)$

Solución

a) Como la F.T. básica es el Seno, entonces el DOMINIO es:

Dom f(x) = **R** ó ⟨**-∞; +∞**⟩

b) Como la F.T. básica es el Coseno, entonces el DOMINIO es:

Dom f(x) = **R** ó ⟨**-∞; +∞**⟩

c) Como la F.T. básica es la Tangente, B = 8 (con signo -) y C= π/4 entonces el DOMINIO es:

$$\text{Dom } f(x) = R - \left\{(2k+1).\frac{\pi}{2B} + \frac{C}{B}\right\}$$

$$\text{Dom } f(x) = R - \left\{(2k+1).\frac{\pi}{2x8} + \frac{\pi/4}{8}\right\}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R - \left\{(2k+1).\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{32}\right\}}$$

d) Como la F.T. básica es la Cotangente, B = 1/5 (con signo -) y C= 7π/8 entonces el DOMINIO es:

$$\text{Dom } f(x) = R - \left\{k.\frac{\pi}{B} + \frac{C}{B}\right\}$$

$$\text{Dom } f(x) = R - \left\{k.\frac{\pi}{(1/5)} + \frac{7\pi/8}{(1/5)}\right\}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R - \left\{5\,k\pi + \frac{35\pi}{8}\right\}}$$

e) Como la F.T. básica es la Secante, B = 4 (con signo +) y C=-30°, entonces el DOMINIO es:

$$\text{Dom } f(x) = R - \left\{(2k+1).\frac{\pi}{2B} - \frac{C}{B}\right\}$$

ó

$$\text{Dom } f(x) = R - \left\{(2k+1).\frac{90°}{B} - \frac{C}{B}\right\}$$

$$\text{Dom } f(x) = R - \left\{(2k+1).\frac{90°}{4} - \frac{(-30)}{4}\right\}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R - \{(2k+1).\underline{45°} + \underline{15°}\}}$$

Como la F.T. básica es la Cosecante, B = 3/7 (con signo -) y C= 30°, entonces el DOMINIO es:

$$\text{Dom } f(x) = R - \{k.\frac{\pi}{B} + \frac{C}{B}\}$$

ó

$$\text{Dom } f(x) = R - \{k.\frac{180°}{B} + \frac{C}{B}\}$$

$$\text{Dom } f(x) = R - \{k.\frac{180°}{3/7} + \frac{30°}{3/7}\}$$

Dom f(x) = **R –{420°k + 70°}**

f) Como la función:

$f(X)=2Tg(3x/2+5°)+3Csc^2(4x/5–15°)$

Tiene 2 componentes:

f1(x) = 2Tg(3x/2+5°)

y

$f2(x) = 3Csc^2(4x/5–15°)$

Donde el Dominio de f1(x) es:

$$\text{Dom } f1(x) = R-\{(2k+1).\frac{90°}{(3/2)} - \frac{5°}{(3/2)}\}$$

$$\text{Dom } f(x) = R -\{(2k+1).\ 60° + \frac{10}{3}°\}$$

Y el Dominio de f2(x) es:

$$\text{Dom } f2(x) = R-\{k.\frac{180°}{(4/5)} + \frac{15°}{(4/5)}\}$$

$$\text{Dom } f(x) = R -\{225°k + \frac{75}{4}°\}$$

Por lo tanto el Dominio resultante será:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbf{R -\{(2k+1).\ 60° + \frac{10}{3}°\} -\{225°k + \frac{75}{4}°\}}$$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Hallar el rango de las siguientes funciones trigonométricas:

$f(x)=3Sen(2x+10°)$ y $g(x)=5Cos3x$.

a)[-1;1], [-1;1] b)[-3;3], [-5;5]
c)[-3;3], [-1;1] d)[-1;1], [-5;5] e)N.A.

2. Hallar el rango de las siguientes funciones trigonométricas:
   $f(x)=Tg^2 x$ y $g(x)=3 + 5Cosx$.

   a)$\langle -\infty;+\infty\rangle$,[3;8] b)$\langle -\infty;+\infty\rangle$,[-2;3]

   c)$[0;+\infty\rangle$,[3;8] d)$[0;+\infty\rangle$,[-2;8]

   e)N.A.

3. Relacione :

	F.T.	Dominio
I)	Tgx	A) R - {(2n + 1) π/2}
II)	Csc2x	B) R - {(2n + 1) π/6
III)	Sec3x	C) R - {nπ/2}

   a) I(A),II(B),III(C) b) I(A),II(C),III(B)

   c) I(B),II(A),III(C) d) I(C),II(A),III(B)

   e) N.A.

4. Hallar el dominio de las siguientes funciones :
   $f(x)= 3Sen(2x -\pi/2)$ y
   $g(x)= Cos(4x+ 3\pi/4)$.

   a) $\langle -\infty; +\infty \rangle$ b) $\langle 0; + \infty\rangle$, $\langle 0; + \infty\rangle$

   c) [-2; 2], [-4; 4] d) [0; 2]; [0;4]

   e) N.A

5. Qué se puede afirmar acerca de las funciones: Coseno, Cotangente y Cosecante en el IVC, cuando el ángulo crece.

   a) Son positivas
   b) Disminuye en valor relativo
   c) Son crecientes
   d) Crecen en valor absoluto
   e) N.A.

6. Determinar periodo de: $f(x) = Sen\ 5x$.

   a) $2\pi /5$ b) $5\pi/2$ c) 5π d) $\pi/5$ e) π

7. Determinar el período de:
   $f(x) = 6Senx - 7Cos2x$.

   a) $\pi/2$ b) π c) $3\pi/2$ d) 2π e) N.A.

8. Determinar el período de: $g(x)=Sen(x/2)+Sen(x/3)+Sen(x/4)$

   a)6π b)8π c)12π d)18π e)24π

9. Si θ es un ángulo positivo menor que una vuelta y pertenece al IIC determinar los signos de :

   I) $\dfrac{Sen\theta.Ctg\theta}{Sen\left(\dfrac{3\theta}{2} + 50°\right)}$

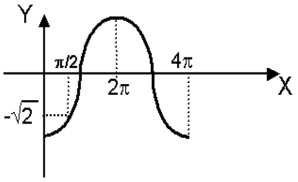
II) $\dfrac{\text{Sen}^2 (15\theta + 20°)}{\text{Cos } \dfrac{5\theta}{4}}$

III) $\dfrac{\text{Sec}^2 \theta + \text{Csc}^2 \theta}{\text{Tg}\theta + \text{Ctg}\theta}$

a) +; +; + b) +; -; + c) +; -; -
d) -; +; + e) -; -; -

10. La ecuación de la gráfica adjunta es:

a) $Y = 2\text{Sen}^2 X$
b) $Y = -2 \text{ Cos}(x/2)$
c) $Y = 2 \text{ Sen } 2x$
d) $Y = -2 \text{ Cos } 2x$
e) $Y = -2 \text{ Sen } (x/2)$

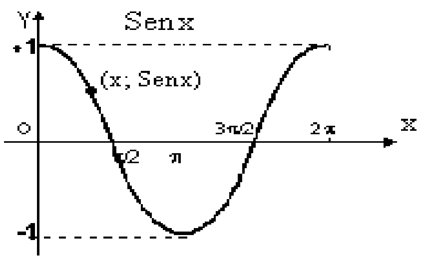


11. El par ordenado (x;0,8) es un punto M que pertenece al gráfico "Cos X" calcular el valor de:

$P = \text{Sen}^2 x + \text{Tan } x; \qquad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

a) 11 b) 111 c) 1,5
d) 1,11 e) N.A.

12. Si el punto (x;0,5) es un punto que pertenece al gráfico de "Senx". Hallar el valor de:
$P = \text{Sen}^2 2x + \text{Tg}^2 x + \text{Sec } 6x$
$0° < x < 90°$



a) $\dfrac{1}{12}$ b) 12 c) $\dfrac{12}{5}$

d) $\dfrac{1}{2}$ e) N.A.

REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1. Hallar el rango de las siguientes funciones trigonométricas:
$f(x)=\text{Sen}^2 x$ y $g(x)=\text{Cos}^3 x$.

a)[-1;1], [-1;1] b)[0;1], [0;1]
c)[0;1], [-1;1] d)[-1;1], [0;1] e)N.A.

2. Hallar el rango de las siguientes funciones trigonométricas:
$f(x)=\text{Csc}^2 x$ y $g(x)=5 + \text{Tg}^2 x$.

a)$[1;+\infty\rangle,[5;+\infty\rangle$ b)$[1;+\infty\rangle,[0;+\infty\rangle$ c)$[0;+\infty\rangle,[5;+\infty\rangle$ d)$[1;+\infty\rangle,[0;+\infty\rangle$ e)N.A.

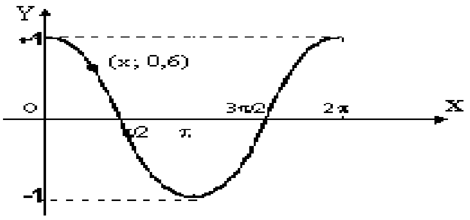
3. Hallar el dominio de la siguiente función : f(x)=Csc(x - π/5).

   a) R - {nπ - π/5} b) R - {nπ}
   c) R - {nπ + π/5} d) R - {nπ/5}
   e) N.A.

4. Hallar el Dominio de la siguiente función : Ctgx/7.

   a) R - {nπ} b) R - {7nπ}
   c) R - {nπ/7} d) R - {nπ+7π}
   e) N.A.

5. Hallar el valor de:
   M = Tan^{2}x + Cos x o < x < π / 2
   Si el par ordenado (x;0,6) es un punto que pertenece al siguiente gráfico del Cos x



   a) 107/40 b)40/7 c) 2,32
   d) 2,38 e) N.A.

6. Qué función o funciones decrecen en valor relativo en el segundo cuadrante y crece en valor absoluto en el tercer cuadrante a medida que el ángulo crece.

   a)Seno b)Coseno c)Tangente d)Cotangente e)Secante

7. Cuál o cuáles de las siguiente proposiciones son correctas acerca de la función secante en el IIC:
   I) Aumenta en valor relativo.
   II) Crece en valor absoluto.
   III) Decrece en valor absoluto.
   IV) Decrece en valor relativo.

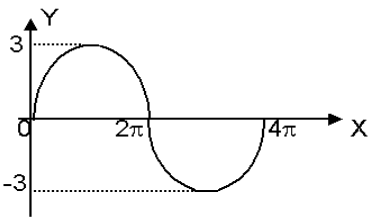
   a) I y II b) I y III c) I y IV
   d) II y IV e) N.A.

8. Determinar el período de:
   f(x) = 7 + Cos^6 3x.

   a)3π b)π c)π/3 d)2π e)2π/3.

9. Si f(x) =a.Sen(bx) es una función cuya gráfica se muestra en la figura adjunta, determinar a + b.

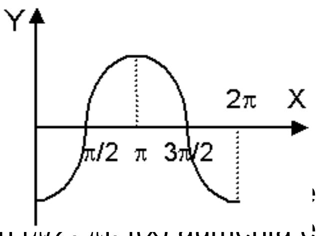
   a) 5
   b) 2
   c) 4
   d) 3
   e) 3,5



10. Determinar el período de:
    f(x)= Sen 2x + Sen 3x

    a)π/2 b)π c) 3π/2 d) 2π e) N.A.

11. Analizando la variación de una función sinusoidal f(x) en [0;2π]} se obtiene la gráfica adjunta. Marque lo incorrecto:



a) E ... n V.R.
b) En [π/2; π]; f(x) aumenta en V.A.
c) En [π; 3π/2];f(x) disminuye en V.R.
d) En [3π/2 ; 2π]; f(x) diminuye en V.A.
e) En [0; π/2]; f(x) disminuye en V.A.

12. Si X ∈ 〈 -π/4 ; π/4 〉 entonces no es cierto que :

a)-1<Tgx <1
b) -∞ <Ctg2x <+ ∞
c) 0<Sen(2x+π/2)≤1
d) -1 ≤Cos4x ≤ 1
e) -1 ≤Sen4x ≤ 1