FICHAS DE LA CIRCUNFERENCIA II

1. ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA

Si la ecuación ordinaria de la circunferencia se desarrolla, ntonces se tiene:

$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$

Ordenando la ecuación, obtenemos:

$x^2 + y^2 - (-2h)x + (-2k)y + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$

Haciendo:

$D = -2h$; $E = -2k$, $F = h^2 + k^2 - r^2$

Ecuación que tiene la forma:

$$\boxed{(x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

La ecuación anterior es llamada forma general de la ecuación de la circunferencia.

Observación:

Para saber si una ecuación de la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una circunferencia, procedemos a completar cuadrados y obtenemos:

$(x^2 + Dx + D^22/4) + (y^2 + Ey + E^2/4) + F - D^2/4 - E^2/4 = 0$

$\Rightarrow (x+D/2)^2 + (y+E/2)^2 = (D^2+E^2-4F)/4$

Comparando esta ecuación con la ecuación:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Observamos que toda ecuación de la forma:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

Representa una circunferencia de centro:

$$\boxed{\text{Centro} = (-D/2;\ -E/2)}$$

Donde: $h = -D/2$ y $k = -E/2$

$$\boxed{\text{Radio} = r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}$$

Siempre que se cumpla la condición
$D^2 + E^2 - 4F > 0$

Análisis:

a) Si: $D^2 + E^2 - 4F = 0$, entonces $r = 0$ y la ecuación se reduce a un punto, al centro.

b) Si: $D^2 + E^2 - 4F = 0$, entonces el radio r será imaginario (complejo), luego, la ecuación no tendrá representación geométrica real.
Es decir la ecuación representa a una circunferencia imaginaria

c) Si: $D^2 + E^2 - 4F = 0$, entonces $r > 0$ y la ecuación representará a una circunferencia de centro y radio dados.

<u>EJEMPLO 1</u>:

La ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$, corresponde a una circunferencia. Hallar el centro y el radio.

RESOLUCIÓN
Completando cuadrados podemos transformar la ecuación dada en la forma:
$(x^2 - 2x+1)+(y^2-4y+4)-1 = 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

Luego: C(1;2) y r = 1

<u>EJEMPLO 2</u>:

La ecuación: $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$, representa o no a una circunferencia

RESOLUCIÓN
Si la ecuación representa a una circunferencia, se debe cumplir:
$D^2 + E^2 -4F > 0$

Reemplazamos valores:

$4^2 + 2^2 - 4(I) > 0$
$16 > 0$

Efectivamente se cumple:

El radio: $r = \frac{1}{2}\sqrt{16} \rightarrow r = 2$

Centro: $C\left(-\frac{4}{2};\frac{2}{2}\right) \rightarrow C(-2;1)$

EJEMPLO 3:

Determinar la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos:
A(4;6); B(-2;-2) y C(-4;2)

RESOLUCIÓN
Los tres puntos dados siempre que no esten sobre una misma recta, determinan 3 condiciones geométricas que permiten definir a la circunferencia.

Si reemplazamos las coordenadas de cada punto en la ecuación general de una circunferencia:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

se obtienen 3 ecuaciones con 3 incognitas o constantes arbitrarias D, E y F:

$4D+6E+F = -52$ .... (1)

$-2D+2E+F = -8$ .... (2)

$-4D+2E+F = -20$ .... (3)

Resolviendo el sistema se encuentran los valores:

$D = -2$; $E = -4$ y $F = -20$

La ecuación de la circunferencia es:

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

Esta solución se ha determinado siguiendo un método estrictamente algebraico.

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (-2;5) y es tangente a la recta x=7

   Resolución :

2. Hallar la ecuación de la circunferencia C(-2;4) y que pasa por la intersección de las rectas:
   L_1: $4x - 7y + 10 = 0$
   L_2: $3x + 2y - 7 = 0$

   Resolución :

3. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C(-4;-1) y es tangente a la recta 3x+2y-12=0

   Resolución :

4. Una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, está sobre la recta cuya ecuación es: $x - 7y + 25 = 0$. Hallar la longitud de la cuerda

Resolución :

5. Sobre la circunferencia: $x^2 + y^2 - 6x - 14y + 33 = 0$. Hallar los puntos que distan 5 unidades del punto C(-1;-1)

Resolución :

6. ¿Cuánto debe valer "t" para que la recta: $2x + 3y = -t$ sea tangente a la circunferencia: $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$?

Resolución :

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto C(0,-2) y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$

2. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas:

   L_1: $3x - 2y - 24 = 0$
   L_2: $2x + 7y + 9 = 0$

3. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto A(7;-5) y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas: L_1: $7x - 9y - 10 = 0$ y
   L_2: $2x - 5y + 2 = 0$
4. Hallar la ecuación de la mediatriz de la cuerda A(-4;3) y B(3;4) y demostrar que pasa por el centro de la circunferencia
5. Una circunferencia pasa por los puntos A(-3;3) y B(1;4) y su centro está sobre la recta $3x - 2y - 23 = 0$. Hallese su ecuación

6. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son:
   L_1: $9x + 2y + 13 = 0$
   L_2: $3x + 8y - 47 = 0$
   L_3: $x - y - 1 = 0$
   Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita

7. La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = 50$. El punto medio de una cuerda de esta circunferencia es M(-2,4). Hallar la ecuación de la cuerda.
8. La ecuación de una circunferencia es $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$. Hallar la ecuación de la tangente a este círculo en el punto P(6;7)

9. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está sobre la recta L: $6x + 7y - 16 = 0$ y es tangente a cada una de las rectas: L_1: $8x + 15y + 7 = 0$ y L_2: $3x - 4y - 18 = 0$

10. Hallar la ecuación de la circunferencia; que pasa por los puntos A(-8;5) y por las intersecciones de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 18 - 4y + 67 = 0$$