FACTORIZACIÓN EMPLEANDO METODO DEL ASPA

ALGEBRA

Factorizar un trinomio de la forma x2 + bx + c es expresarlo como un producto de dos binomios de la forma (x + p) (x + q) donde x = $\sqrt{x^2}$, p + q = b y pq = c

Es decir: $x^2 + bx + c = (x + p)(x + q)$

Anota
$x^2 + bx + c = (x + p)(x+q)$

1. Si c es **positiva**, entonces p y q tienen el **mismo signo.**
2. **Si c es** negativa**, entonces p y q tienen signos diferentes.**

Ejemplos: Factoriza.

a) $x^2 – x – 12$

<u>Solución:</u>

Producto igual a – 12	Suma de factores
(1) (-12)	(1) + (-12) = -11
(2) (-6)	(2) + (-6) = -4
(3) (-4)	(3) + (-4) = -1
(4) (-3)	(4) + (-3) = 1
(6) (-2)	(6) + (-2) = 4
(12) (-1)	(12) + (-1) = 11

Los números que buscamos son 3 y -4, ya que su producto es -12 y su suma es -1. Luego, la factorización del trinomio es $x^2 – x – 12 = (x - 4)(x + 3)$

b) $x^2 + 5x – 14$

<u>Solución:</u>
Los números cuya suma es 5 y su producto es -14 son 7 y -2, pues 7 + (-2)=5 y (7) (-2) = -14. Luego $x^2 + 5x – 14 = (x + 7)(x - 2)$

<u>Un reto</u>
¿Puedes hallar el trinomio donde la suma de los términos independientes de sus polinomios primos sea -4 y el producto de ellos sea -21?

c) $(x+y)^2 – 12 (x + y) + 20$

<u>Solución:</u>
El primer término de cada binomio es $\sqrt{(x+y)^2}$ = x + y
Los números cuya suma es -12 y su producto es 20 son -2 y 10. Luego
$(x+y)^2 – 12(x+y) + 20= [(x + y) - 10]$
$(x+y)^2 – 12(x+y) + 20= [(x + y - 20) (x + y - 10)$

En general:

Podemos aplicar este método de factorización de polinomios de la forma:

$$\boxed{x^{2n} + bx^n + c}$$

> **Anota**
> Si factorizamos el trinomio por el método estudiado.
> $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3)$
> $= (x + 3)^2$
> Obtenemos el cuadrado de un binomio. Se dice entonces que este es un **trinomio cuadrado perfecto (TCP). Para factorizar un TCP se puede utilizar la siguiente identidad:**
> $$\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

Ejemplos: Factoriza los siguientes trinomios:

a) $x^6 + 3x^3 – 4$

b) $x^8 – 5x^4 + 4$

c) $a^4b^4 – a^2b^2 – 42$

Solución:

a) El primer término de cada binomio es $\sqrt{x^6} = x^3$
Los números cuya suma es 3 y su producto es -4, son 4 y -1
Luego, $x^6 + 3x^3 – 4 = (x^3 + 4)(x^3 - 1)$; observa que $x^3 – 1$ no es un polinomio primo
Factorizándolo obtendremos $x^6 + 3x^3 – 4 = (x^3 + 4) (x - 1) (x^2 + x + 1)$

b) $x^8 – 5x^4 + 4 = (x^4 - 1) (x^4 - 4) = (x^2 + 1) (x^2 - 1) (x^2 + 2) (x^2 - 2)$

c) El primer término de cada binomio es $\sqrt{a^4b^4} = a^2b^2$
Los números cuya suma es -1 y su producto es -42 son -7 y 6. Luego, $a^4b^4 – a^2b^2 – 42 = (a^2b^2 - 7) (a^2b^2 + 6)$

MÉTODO DEL ASPA

1. Se descompone el primer término del trinomio (x2) en dos factores. De cada factor sale una flecha y forma un aspa. ( )

$$\begin{array}{lcl} x^2 & + 7x + & 12 \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & & +3 \\ x & & +4 \end{array}$$

2. Se descompone el término independiente (12) en dos factores, a estos factores llegan las flechas, para determinar el signo de dichos factores basta fijarse en el signo del segundo término del trinomio. Si el signo del segundo término del trinomio. Si el signo del segundo término es positivo los dos factores binomios son sumas. Ahora si el tercer término (término independiente) es negativo, los

factores binomios serán uno suma y el otro diferencia. (Se coloca el signo del segundo término al mayor producto obtenido al multiplicar en Aspa).

3. Por último se multiplican los factores obtenidos como indican las flechas. Si esta suma es igual al segundo término del trinomio, entonces termina la factorización y los factores que corresponde al trinomio son los binomios considerados en su posición horizontal.
   (En caso que la Suma es diferente al segundo término del trinomio, se ensaya con otros factores)

$$\begin{array}{lcl} x^2 + 7x + 12 & & \\ x \quad\quad +3 & \Rightarrow & +3x \\ x \quad\quad +4 & \Rightarrow & \underline{+4x} \\ & & +7x \end{array} \quad \boxed{+}$$

$\therefore$ $\underline{x^2 + 7x + 12 = (x + 3)\,(x + 4)}$

Ejemplo: Factorizar: $x^2 - 8x + 15$

Resolución:

$$\begin{array}{lcl} x^2 - 8x + 15 & & \\ x \quad\quad -3 & \Rightarrow & -3x \\ x \quad\quad -3 & \Rightarrow & \underline{-5x} \\ & & 8x \end{array} \quad \boxed{+}$$

$\therefore$ $\underline{x^2 - 8x + 15 = (x - 3)\,(x - 5)}$

CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTO

1. Halla dos números cuya suma y producto sean respectivamente los que se dan a continuación:

   a) 6 y 8
   b) -1 y 30
   c) -4 y – 12
   d) -8 y – 9
   e) -3 y 10

2. Factorizar cada uno de los trinomios siguientes:

   a) $x^2 + 9x + 20$
   b) $b^2 + 7b + 10$
   c) $z^2 + 8z + 15$
   d) $a^2 + 7a + 6$
   e) $b^2 - 11b + 18$
   f) $z^2 - 13z + 40$

3. Factorizar los siguientes trinomios (previamente ordénalos)

   a) $x^2 - 30 - 7x$
   b) $-60 + a^2 - 17a$
   c) $-4y + 3 + y^2$
   d) $33 + x^2 - 14x$
   e) $-5x - 50 + x^2$
   f) $7x + x^2 - 60$

4. Factorizar:

   a) $x^8 - x^4 - 12$
   b) $a^4 + 12a^2 + 27$
   c) $a^{2n} - 11a^n + 28$
   d) $x^2 + (2a - b)\,x - 2ab$
   e) $(a + 2)^2 + 3(a + 2) - 28$

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Halla dos números cuya suma y producto sean respectivamente los que se dan a continuación:
   a) 11 y 24
   b) -12 y 35
   c) -6 y -16
   d) -6 y 5
2. Factoriza cada uno de los trinomios siguientes:
   a) $x^2 - 8x + 12$
   b) $x^2 - 8x - 240$
   c) $x^2 + 6x - 16$
   d) $y^2 + 10y + 24$
   e) $y^2 + 10y - 24$
   f) $y^2 + 11y + 24$
   g) $x^2 - x - 6$
   h) $m^2 - 2m - 168$
   i) $c^2 + 24c + 135$
   j) $n^2 - 41n + 400$
   k) $y^2 + 432 + 43y$
   l) $z^2 - 4z - 320$

3. Subraya los trinomios que tienen como polinomio primo a $(x^2 + 1)$
   a) $x^4 + 3x^2 - 4$
   b) $x^4 - 3x^2 - 10$
   c) $x^4 + 4x^2 - 5$
   d) $x^4 + 4x^2 + 3$
   e) $x^4 + 9x^2 - 10$
   f) $x^4 - 9x^2 + 18$
   g) $x^4 - x^2 - 2$
   h) $x^4 - 3x^2 - 28$
4. Factoriza:
   a) $a^2 + 12a + 32$
   b) $x^2 + 4x + 3$
   c) $a^2 - 7a + 12$
   d) $x^2 - 11x + 24$
   e) $y^2 - 15y + 50$
   f) $x^2 - 6x + 5$
   g) $a^2 + 4a - 45$
   h) $x^2 + 5x - 14$
   i) $y^2 + 11y - 60$
5. Factoriza:
   a) $y^2 + 9y^3 + 8$
   b) $(ab)^2 + 7ab + 10$
   c) $(x + 1)^2 + 5(x+1) + 6$
   d) $(x + y)^2 + (x + y) - 110$