FACTORIZACIÓN I

Es la transformación de un polinomio en una multiplicación indicada de sus factores primos o sus potencias.

Ejemplo:

$$\underbrace{x^2+9x-22}_{\text{suma algebraica}} = \underbrace{(x-2)(x+11)}_{\text{factores primos}}$$

NOTA: Factor primo es aquel que es divisible por la unidad y por si mismo.

POLINOMIO PRIMO O IRREDUCTIBLE.

Análogamente a los números primos, existen polinomios que no admiten factores. Tales clases de polinomios, de grado mayor que cero, sólo son divisibles por sí mismos y una constante no nula; éstos reciben el nombre de polinomios primos o irreductibles.

Ejemplos:

- $x+13$
- $2x$
- x^2+1
- x^3+9
- $3x-1$

OBSERVACIÓN: La factorización se realiza en el conjunto de las expresiones algebraicas racionales enteras respecto a la variable y respecto a los coeficientes en el conjunto de los números racionales, aunque en éste último caso puede existir alguna reconsideración en abandonar el conjunto racional (Q).

POLINOMIO DEFINIDO SOBRE UN CAMPO NUMÉRICO

Un polinomio está definido sobre un campo numérico, si todos sus coeficientes pertenecen a dicho campo, sólo vamos a considerar 3 campos numéricos: Q, R y C.

Ejemplos:

- En el polinomio:

  $P_{(x)}=4x^3-\frac{2x^2}{3}+5x-7$, se tiene:

  $\{4; -\frac{2}{3}; 5; -7\} \subset Q$

Es decir, todos sus coeficientes son racionales, por tanto P está definido sobre Q.

- En el polinomio:

  $F_{(x,y)}=x^3+\sqrt{2}\,x^2y+2xy^2+\pi$, se tiene:

  $\{1;\sqrt{2};2;\pi\}\subset R$

- En el polinomio:

  $G_{(x,y)}=-5x^2+\sqrt{3}\,i x^3+xy^9$ se tiene:

  $\{-5;\sqrt{3}\,i;1\}\subset C$

FACTOR O DIVISOR ALGEBRAICO

Todo polinomio no constante, que divide exactamente a otro polinomio se llama factor o divisor algebraico.

Ejemplo: P(x)=x-1 es un factor algebraico de $F_{(x)}=x^2-1$; pues la división:

$$\frac{F_{(x)}}{P_{(x)}}=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1 \text{ es exacta}$$

NÚMERO DE FACTORES PRIMOS (F.P)

El número de factores primos de un polinomio se obtienen contando el número de factores basales, es decir los factores que se encuentren como base de una potencia y que contengan a la variable.

Nota: Para realizar el conteo no se debe considerar el número de veces que actúa un determinado factor.

Ejemplos:

- $P_{(x)}=(x+3)^2(x^3+2)^7(2x-1)$

  N° de factores primos es 3

- $Q_{(x)}=3^6(x+5)(x^4+1)^3$

  N° de factores primos es 2

- $R_{(x,y)}=x^3y^3(x+2y)^5(x-3y)^4$

  N° de factores primos es 4

NUMERO DE FACTORES TOTALES

Sea: $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$ donde a, b, c son primos entre sí:

$$\boxed{N° \text{ Factores}=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}$$

Ejemplo: **Determinar el número de factores de:**

$P_{(x,y)}=(2x-y)^2(x+y)^3(a^2+b^2)^2$

$\Rightarrow$ **N° Factores = (2+1)(3+1)(2+1)**

= 36 factores

NÚMERO DE FACTORES ALGEBRAICOS O DIVISORES ALGEBRAICOS

Un polinomio factorizado presenta una cantidad determinada de factores algebraicos, es decir expresiones que lo dividen en forma exacta en el cual no se considera a ninguna constante.

Sea: $a^{\alpha}\,b^{\beta}\,c^{\gamma}$ donde a, b, c son primos entre si:

$$\boxed{\text{N° Factores} = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)-1}$$

Ejemplo: Determinar el número de factores de:

$$xy^2 \to \left.\begin{array}{l} x \\ y \\ xy \\ y^2 \\ xy^2 \end{array}\right\} \text{Factores algebraicas totales}$$

Por fórmula:

N° Factores algebraicos = (1+1)(2+1)-1
= (2)(3)-1
= 5

NUMERO DE FACTORES COMPUESTOS O DIVISORES COMPUESTOS

F.C.	**=**	**F.A.**	**-**	**F.P**
Factores Compuestos		Factores Algebraicos		Factores Primos

Ejemplo: $P_{(x,y)}=x^2y^3$

- **Factores primos = 2**
- **Factores totales = 12**
- **Factores algebraicos = (2+1)(3+1)-1=11**
- **Factores compuestos = 11-2=9**

METODOS DE FACTORIZACÓN

Son técnicas a utilizar, de acuerdo a la forma que presente el polinomio.

I. Método del factor común y/o agrupación de términos.

Para aplicar este método tendremos en cuenta lo siguiente:

- **Observar si toda la expresión tiene uno o más factores comunes, si estuviesen elevados a exponentes, se extrae el que está elevado al menor.**
- **Si la expresión no tuviera factores comunes, éstos se consiguen agrupando términos y el número de términos que se reúnen dependen del numero de términos del polinomio dado.**
- **Se extrae el factor común y el otro factor se determina dividiendo cada uno de los términos del polinomio entre el factor común extraído.**

Ejemplo:

1. Factorizar: $P(x)=4x^4+5x^2$

Resolución:

El factor común es: x^2

$\Rightarrow P_{(x)} = x^2(4x^2+5)$

2. Factorizar: $P_{(x,y)}=x^3(x+y)+5xy(x+y)$

   Resolución:
   El factor común es: x(x+y)
   $\Rightarrow$ $\mathbf{P_{(x,y)}=x(x+y)(x^2+5y)}$

3. Factorizar:

   $P_{(x,y)} = a^2x-ax^2-2a^2y+2axy+x^3-2x^2y$

   Resolución:

   $\mathbf{P_{(x,y)}=\underline{a^2x}-\underline{ax^2}-\underline{2a^2y}+\underline{2axy}+\underline{x^3}-\underline{2x^2y}}$

   $\mathbf{P_{(x,y)}=a^2(x-2)-ax(x-2y)+x^2(x-2y)}$

   $\mathbf{P_{(x,y)}=(x-2y)(a^2-ax+x^2)}$

1. Factorizar:
   $6m^3 n^3 - 12m^2 n^4 + 9m^4 n^2$

   Resolución:
   Rpta. $3m^2 n^2 (2mn - 4n^2 + 3m^2)$

2. Factorizar: $-m -n + x (m + n)$

   Resolución :

   Rpta. $(m + n) (x - 1)$

3. Factorizar:

   $x(3m - 2n) - 3m + 2n$

   Resolución:
   Rpta. $(3m - 2n) (x-1)$
4. Factorizar:
   $3x (p - q + r) - 2y (q - p - r)$

   Resolución:
   Rpta. $(p - q + r) (3x + 2y)$

5. Factorizar:

   $abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1$

   Resolución:

Rpta. $(a+1) (b+1) (c+1)$

6. Factorizar:

$2m^2 + 2mb - 3am - 3ab$

Resolución:

Rpta. $(m + b)(2m - 3a)$

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Factorizar: $m^2 - 2m + am - 2a$ e indicar uno de sus factores

a) $(m+2)$ b) $(m^2 + a)$
c) $(m^2 - a)$ d) $(m-2)$ e) N.A.

2. Factorizar: $mx - m - x + 1$
e indicar la suma de sus términos independientes de los factores primos

a) 2 b) -2 c) 1
d) -1 e) N.A.

3. Factorizar: $2mn + 7m - 2n - 7$ y señala el mayor de los términos independiente de sus factores primos

a) 1 b) 3 c) 7
d) 9 e) N.A.

4. Factorizar:

$3ax - 3ay - 2bx + 2by$ y señalar uno de sus factores primos.

a) x+y b) x+1 c) x-y
d) y+2 e) N.A.

5. Factorizar: $a^3 + a^2 + a + 1$ e indicar el número de factores primos

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) N.A.

ALGEBRA

6. Factorizar:
   $2a^2 x + 2ax + 2x - a^2 - a - 1$
   e indicar el mayor de los coeficientes de sus factores primos

   a) 1 b) 2 c) 3
   d) 5 e) N.A.

7. Factorizar:
   $x^2 + \frac{1}{3}x + 3x + 1$ y señala el término independiente entero de uno de sus factores primos.

   a) 1 b) 3 c) 5
   d) 7 e) N.A.

8. Factorizar:
   $6ax-5bx + 5by - 6ay + 6axy - 5bxy$
   e indicar uno de sus factores primos

   a) 6a+5b b) 6a+b c) 5b+a
   d) 6a-5b e) N.A.

9. Factorizar:
   $3b^2y + a^2x - 3b^2x - a^2y+2aby-2abx$
   E indicar uno de sus factores primos

   a) x+y b) x-y c) 2x+y
   d) x+2y e) N.A.

10. Factorizar:
    $ax^2 + 3ax - 3ay - axy + x^2z + 3xz - 3yz - xyz$ e indcar el número de factores primos.

    a) 1 b) 2 c) 3
    d) 4 e) N.A.