



EJERCICIOS DE IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Al finalizar el capítulo; Ud. Será capaz de:

1. Conocer las distintas relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo
2. reducir expresiones donde intervienen razones trigonométricas aplicando conveniente las identidades dadas.

Una de las muchas aplicaciones que se puede presentar sobre las identidades trigonométricas se muestra en la figura. La distancia "d" que recorrerá la pelota en el aire esta dada por la expresión:

$$d = \frac{2V^2 \text{Sen}\theta \text{Cos}\theta}{9}$$

Aplicando Identidades queda Simplificada:

$$d = \frac{V^2 \text{Sen}2\theta}{9}$$

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS FUNDAMENTALES

Son igualdades en las que intervienen razones trigonométricas, las cuales se verifican para todo valor permitido de la variable, las Identidades principales son:

A Identidades Reciprocas

$$\text{Sen } x \times \text{Csc}x = 1$$

$$\text{Cos}x \times \text{Sec}x = 1$$

$$\text{Tan } x \times \text{Ctg}x = 1$$

B Identidades Por Cociente:

$$\text{Tan}x = \frac{\text{Sen}x}{\text{Cos}x}$$

$$\text{Ctg } x = \frac{\text{Cos}x}{\text{Sen}x}$$

C Identidades Pitagóricas:

$$\text{Sen}^2 + \text{Cos}^2x = 1$$

$$1 + \text{Tan}^2x = \text{Sec}^2x$$

$$1 + \text{Ctg}^2x = \text{Csc}^2x$$

NO OLVIDES

$$\text{Csc}x = \frac{1}{\text{Sen}} \quad \frac{1}{\text{Sen}}$$

$$\text{Sec}x = \frac{1}{\text{Cos}x}$$

$$\text{Ctg}x = \frac{1}{\text{Tan}x}$$

IDENTIDADES AUXILIARES

$$\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x = 1 - 2\text{Sen}^2x \text{Cos}^2x$$

$$\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x = 1 - 3\text{Sen}^2x \text{Cos}^2x$$

$$\text{Sec}^2 + \text{Csc}^2x = \text{Sec}^2x + \text{Csc}^2x$$

$$\text{Tag}x + \text{Ctg}x = \text{Sec}x + \text{Csc}x$$

$$(1 \pm \text{Sen}x \pm \text{Cos}x)^2 = 2(1 \pm \text{Sen}x)(1 \pm \text{Cos}x)$$

$$\text{Vers}x = 1 - \text{Cos}x$$

$$\text{Cov}x = 1 - \text{Sen}x$$

$$\text{Ex Sec}x = \text{Sec}x - 1$$

TIPOS DE EJERCICIOS SOBRE IDENTIDADES

Los ejercicios sobre identidades pueden ser de 4 tipos:

- I. **Demostraciones:** Para demostrar una identidad, implica que el primer miembro se pueda reducir al segundo miembro o viceversa o que cada miembro por separado se pueda reducir a una misma forma. Para la verificación de identidades se puede utilizar las diferentes transformaciones tanto algebraicas como trigonométricas y en este último caso resulta muy útil escribir la identidad en términos de senos y cosenos.

Ejemplo: Demostrar:

$$\frac{\text{Sen}^6 \alpha - \text{Cos}^6 \alpha}{\text{Sen}^2 \alpha - \text{Cos}^2 \alpha} = 1 - \text{Sen}^2 \alpha \text{Cos}^2 \alpha$$

$$\frac{(\text{Sen}^2 \alpha - \text{Cos}^2 \alpha)(\alpha^4 + \alpha^2 + \text{Sen}^2 \alpha \text{Cos}^2 \alpha)}{(\alpha \text{Sen}^2 - \text{Cos}^2 \alpha)} = 1 - \text{Sen}^2 \alpha \text{Cos}^2 \alpha$$

Como: $\text{Sen}^4 \alpha + \text{Cos}^4 \alpha = 1 - 2\text{Sen}^2 \alpha \text{Cos}^2 \alpha$

$$\therefore 1 - 2\text{Sen}^2 \alpha \text{Cos}^2 \alpha + \text{Sen}^2 \alpha \text{Cos}^2 \alpha = 1 - \text{Sen}^2 \alpha \text{Cos}^2 \alpha$$

$$1 - \text{Sen}^2 \alpha \text{Cos}^2 \alpha = 1 - \text{Sen}^2 \alpha \text{Cos}^2 \alpha$$

- II. **Simplificaciones:** Se busca una expresión reducida de la planteada con ayuda de las Identidades fundamentales y/o auxiliareis con transformaciones algebraicas.

Ejemplo: Simplificar:

$$M = \frac{\text{Tan} \alpha + \text{Ctg} \alpha}{(\text{Sen} \alpha \cdot \text{Cos} \alpha)(\text{Sec}^2 \alpha + \text{Csc}^2 \alpha)}$$

Empleando Identidades:

$$M = \frac{\text{Sec} \alpha \cdot \text{Csc} \alpha}{(\text{Sen} \alpha \cdot \text{Cos} \alpha)(\text{Sec} \alpha \text{Csc} \alpha)^2}$$

$$M = \frac{1}{(\text{Sen} \alpha \cdot \text{Cos} \alpha) \left(\frac{1}{\text{Sen} \alpha \text{Cos} \alpha} \right)} = \frac{1}{\text{Sen} \alpha \cdot \text{Cos} \alpha} \cdot \frac{\text{Sen} \alpha \cdot \text{Cos} \alpha}{1}$$

$$M = \frac{1}{1} = 1$$

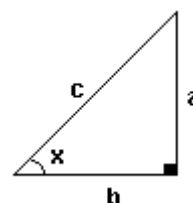
$$\therefore M=1$$

IMPORTANTE

Una buena recomendación consiste en transformar todo el miembro elegido en una expresión en función de Seno y Coseno

NO OLVIDES

En:



$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

- III. **Condicionales:** Si la condición es complicada debemos simplificarla y así llegar a una expresión que pueda ser la pedida o que nos permita hallar fácilmente la que nos piden de lo contrario se procede a encontrar la expresión pedida.

Resolver:

$$\text{Si } \text{Tg} \alpha + \text{Ctg} \alpha = \sqrt{6}$$

Encontrar que: $\text{Tg}^2\alpha + \text{Ctg}^2$

Sabemos que:

$$(\text{Tan}\alpha + \text{Ctg}\alpha)^2 = \text{Tan}^2 + \text{Ctg}^2 + 2\text{Tan}\alpha\text{Ctg}\alpha$$

$$(\sqrt{6})^2 = \text{Tan}^2\alpha + \text{Ctg}^2\alpha + 2(1)$$

$$\text{Tan}^2\alpha + \text{Ctg}^2\alpha = 6-2$$

$$\therefore \text{Tan}^2\alpha + \text{Ctg}^2\alpha = 4$$

CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTOS

- Calcular el valor de A en:
 $\text{Tan}^2x + \text{Sec}^2x = A \text{Sec}^2x - 1$
- Demostrar $1 + \frac{\text{Tan}\alpha}{\text{Ctg}\alpha} = \text{Sec}^2x$
- Demostrar:
 $(\text{Tan}\alpha + \text{Ctg}\alpha)^2 = \text{Sec}^2\alpha \text{Csc}^2\alpha$
- Simplificar:
 $(\text{Csc}\alpha + \text{Sen}\alpha)^2 + 2\text{Cos}\alpha - (\text{Sen}\alpha + \text{Ctg}\alpha)^2$
- Demostrar:
 $\frac{\text{Sen}^3\alpha - \text{Cos}^3\alpha}{1 + \text{Sen}\alpha\text{Cos}\alpha} = \text{Sen}\alpha - \text{Cos}\alpha$
- Simplificar:
 $\left(\frac{\text{Csc}\alpha + 1}{\text{Ctg}\alpha}\right) - \left(\frac{\text{Ctg}\alpha}{\text{Csc}\alpha - 1}\right)$
- Simplificar: $E = \frac{1 + \text{Ctg}x + \text{Csc}x}{1 + \text{Tan}x + \text{Sec}x}$
- Reducir:
 $K = \frac{\text{Sen}^8x + \text{Cos}^8x}{1 - 4\text{Sen}^2x\text{Cos}^2x + 2\text{Sen}^4x\text{Cos}^4x}$
- Si $\text{Sen}x - n \text{Csc}x = 0$
Hallar: Tan^2x

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

- Demostrar:
a) $\frac{\text{Ctg}\alpha}{\text{Tan}\alpha} + 1 = \text{Csc}^2\alpha$

TRIGONOMETRIA

b) $(\tan \alpha + \cot \alpha) \sin \alpha \cos \alpha = 1$

c) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

d) $\frac{\sin^4 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = 1$

e) $\frac{\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = 1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

2. Simplificar:

$F = (1 - \sin x)(1 + \csc x) \sec x$

a) $\sin x$

b) $\cos x$

c) $\cot x$

d) $\tan^2 x$

3. Si α y θ son complementarios. Simplificar:

$E = (\sin^2 \alpha \cos^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta)$

a) 1

b) 4

c) 3

d) 6

e) 2

4. Si: $X = \tan \theta + \cot \theta$

$Y = \sec \theta + \csc \theta$

Hallar: $\frac{(x^2 - y^2)}{2x}$

a) 0

b) 2

c) -1

d) -2

e) $\frac{1}{2}$

5. Si $f(x) = \frac{1}{1+x}$

Calcular: $f(\tan^2 x) + f(\cot^2 x)$

a) 2

b) 0

c) -1

d) 1

e) 4

6. Determinar el valor de "n":

$\frac{\sec \theta - \cos \theta}{\csc \theta - \sin \theta} = (\cot \theta)^n$

a) -1

b) 4

c) -3

d) -2

e) 3

7. Si se cumple:

$a = \sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta$

$b = \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta$

Calcular: $a^2 + b^2$

a) 2

b) 1

c) 3

d) 4

e) 5

8. Reducir:

$$E = \operatorname{Sen} x (1 + \cot x) - \operatorname{Cos} x$$

- a) 0 b) 1 c) $\operatorname{Sen} x$
d) $\operatorname{Cos} x$ e) -1

9. Reducir:

$$E = (1 + \operatorname{Sen} x) (1 - \operatorname{Sen} x) \sqrt{1 + \operatorname{Tg}^2 x}$$

- a) 1 b) $\operatorname{Sen} x$ c) $\operatorname{Cos} x$
d) $\operatorname{Sec} x$ e) $\operatorname{Csc} x$

10. Simplificar:

$$E = \frac{\operatorname{Sec} x - \operatorname{Sen} x}{\operatorname{Csc} x - \operatorname{Cos} x}$$

- a) 1 b) $\operatorname{Tg} x$ c) $\operatorname{Cot} x$
d) $\operatorname{Sec} x$ e) $\operatorname{Csc} x$

11. Reducir:

$$E = (\operatorname{Sen} x + 2\operatorname{Cos} x)^2 + (2\operatorname{Sen} x - \operatorname{Cos} x)^2$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

12. Simplificar:

$$E = \frac{\operatorname{Tg} x (1 + \operatorname{Cot} x) - 1}{\operatorname{Sec} x}$$

- a) 1 b) $\operatorname{Sen} x$ c) $\operatorname{Cos} x$
d) $\operatorname{Tg} x$ e) $\operatorname{Cot} x$

AUTOEVALUACIÓN

1. Simplificar:

$$E = (1 - \operatorname{Sen} x)^{-1} + \underline{\hspace{2cm}}$$

2. Reducir:

$$E = (\operatorname{Csc} x - \operatorname{Sen} x) \underline{\hspace{2cm}} (\operatorname{Tg} x + \operatorname{Cot} x)$$

3. Simplificar:

$$E = \frac{1 + \operatorname{Cot} x + \operatorname{Csc} x}{1 + \operatorname{Tg} x + \operatorname{Sec} x}$$

4. La expresión: $\sqrt{\frac{1 + \operatorname{Cos} A}{1 - \operatorname{Cos} A}}$ es igual a:

- IV. **Eliminación del ángulo:** Estos ejercicios consisten en que a partir de ciertas relaciones trigonométricas debemos encontrar relaciones algebraicas en donde no aparezca el ángulo.

EJEMPLOS

Ejemplo 1: Si: $\text{Sen } \theta = \sqrt{a+1} \dots(1)$

$\text{Cos } \theta = \sqrt{b+1} \dots(2)$ Eliminar " θ "

Solución: Aplicando la propiedad: $A = \sqrt[n]{B} \Rightarrow A^n = B$; obtenemos:

De la expresión (1): $\text{sen}^2 \theta = a + 1 \dots(I)$

De la expresión (2): $\text{cos}^2 \theta = b + 1$

Sumamos miembro a miembro (I) y (II)

$$\underbrace{\text{Sen}^2 \theta + \text{Cos}^2 \theta}_{=1} = a + b + 2 \Rightarrow 1 = a + b + 2 \quad * \quad \therefore a + b + 1 = 0$$

Ejemplo 2: Eliminar " α " de:

$$\sec \alpha = m + n \dots(1)$$

$$\text{tg } \alpha = m - n \dots(2)$$

Solución:

Elevamos al cuadrado ambos miembros las expresiones (1) y (2)

De la expresión (1):

$$(\sec \alpha)^2 = (m+n)^2 \Rightarrow \sec^2 \alpha = m^2 + 2mn + n^2 \dots(I)$$

De la expresión (2):

$$(\text{tg } \alpha)^2 = (m-n)^2 \Rightarrow \text{Tg}^2 \alpha = m^2 - 2mn + n^2 \dots(II)$$

$$\text{Restamos miembro a miembro (I) y (II): } \underbrace{\sec^2 \alpha - \text{tg}^2 \alpha}_1 = 4mn$$

$$= 4mn \quad \therefore 4mn = 1 \text{ Rpta.}$$

Ejemplo 3:

Eliminar α en:

$$\text{Tg}^2 \alpha + \text{Ctg}^2 \alpha = m \dots(1)$$

$$\text{Sen } \alpha - \text{Cos } \alpha = n \dots(2)$$

Operando en (1)

$$\frac{\text{Sen}^2 \alpha}{\text{Cos}^2 \alpha} + \frac{\text{Cos}^2 \alpha}{\text{Sen}^2 \alpha} = m$$

$$\frac{\text{Sen}^4 \alpha + \text{Cos}^4 \alpha}{\text{Sen}^2 \alpha \text{Cos}^2 \alpha} = m$$

$$\frac{1 - 2\text{Sen}^2 \alpha \text{Cos}^2 \alpha}{\text{Sen}^2 \alpha \text{Cos}^2 \alpha} = m$$

$$\text{Como: } \text{Sen } \alpha \text{ Cos } \alpha = n$$

$$\Rightarrow \text{Sen}^2 \alpha \text{ Cos}^2 \alpha = n^2$$

Por lo tanto:

$$\frac{1 - 2n^2}{n^2} = m$$

$$1 - 2n^2 = mn^2$$

$$\therefore mn^2 + 2n^2 = 1$$

ATENCIÓN

En este tipo de problemas tenemos que operar con las igualdades proporcionadas de tal modo que obtengamos otra donde no aparezca el ángulo a eliminar.

DESAFIO

Eliminar x en:
 $a + b \text{ Sen } x = 2$
 $a - b \text{ Cos } x = 4$

1. Si $\text{Sen } \theta + \text{Csc } \theta = a$ Calcular el valor de: $E = \text{Sen}^2 \theta + \text{Csc}^2 \theta$
2. Si $\text{Sen } x + \text{Cos } x = b$ Hallar el valor de:
 $R = 2\text{Sen } x \text{ Cos } x + 1$
3. Si: $\text{Sen } \theta = \sqrt{a+1}$
 $\text{Cos } \theta = \sqrt{b+1}$
 Eliminar θ .
4. Eliminar α en:
 $\text{Sen } \alpha = m + n$
 $\text{Tan } \alpha = m - n$
5. Determinar M para que la igualdad sea una identidad:

$$\frac{1}{\text{Cos}^2 \theta} + \frac{1}{\text{Tan}^2 \theta} = \frac{1}{M} + \frac{1}{\text{Ctg}^2 \theta}$$
6. Simplificar:

$$R = \frac{(1 - \text{Sen} \alpha - \text{Cos} \alpha)^2}{\text{ExSec} \alpha \cdot \text{Cov} \alpha}$$
7. Si $\text{Sen } x - \text{Csc } x = 7$
 Calcular: $\text{Sen } x + \text{Csc } x$
8. Eliminar θ de:
 $\text{Tan } \theta + \text{Sen } \theta = m \qquad \text{Tan } \theta - \text{Sen } \theta = n$

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Reduce:
 $R = (\text{Sen } \alpha + \text{Cos } \alpha)^2 + (\text{Sen } \alpha - \text{Cos } \alpha)^2$
 a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$
 d) 3 e) n.a.
2. Si $\text{Sen } \theta + \text{Cos } \theta = m$
 a que es igual:
 $R = (\text{Vers } \theta)^2 + (\text{Cov } \theta)^2$
 a) $3 + m$ b) $3 - m$ c) $3 - 2$
 d) $3 + 2m$ e) n.a.
3. Eliminar θ en:
 $\text{Sen } \theta = x \quad \wedge \quad \text{Cos } \theta = y$
 a) $x^2 - y^2 = 1$ b) $xy = 1$ c) $x^2 + y^2 = 1$
 d) $2xy = (x + y)^2$ e) n.a.

4. Eliminar θ de:

$$x = 1 + \operatorname{Sen}\theta + \operatorname{Sen}^2\theta + \operatorname{Sen}^3\theta + \dots$$

$$y = 1 + \operatorname{Cos}\theta + \operatorname{Cos}^2\theta + \operatorname{Cos}^3\theta + \dots$$

a) $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{y}\right)^2 = 1$

b) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{y}\right)^2 = 1$

c) $(1-x)^2 + (1-y)^2 = 1$

d) $(1+x)^2 + (1+y)^2 = 1$

e) n.a

5. Si $\operatorname{Tan}\alpha + \operatorname{Sec}\alpha = 4$. Hallar:

$$N = 15 \operatorname{Ctg}\alpha + 17 \operatorname{Cos}\alpha$$

a) 8

b) 10

c) 12

d) 14

e) 16

6. Reduce:

$$B = \frac{\operatorname{Sen}^3\theta + \operatorname{Cos}^3\theta}{(\operatorname{Sec}\theta + \operatorname{Csc}\theta)} \cdot \frac{\operatorname{Tan}\theta + \operatorname{Ctg}\theta}{(1 - \operatorname{Sen}\theta \operatorname{Cos}\theta)}$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) n.a

7. Simplifica:

$$R = \frac{\frac{\operatorname{Sen}x}{1 - \operatorname{Sen}x} + \frac{\operatorname{Csc}x}{1 - \operatorname{Csc}x}}{\frac{\operatorname{Cos}x}{1 + \operatorname{Cos}x} + \frac{\operatorname{Sec}x}{1 + \operatorname{Sec}x}}$$

a) 0

b) 1

c) -1

d) 2

e) -2

8. Simplificar:

$$M = \operatorname{Cos}\theta + \operatorname{Tan}\theta \cdot \operatorname{Sen}\theta$$

a) $\operatorname{Sen}\theta$

b) $\operatorname{Sec}\theta$

c) $\operatorname{Tan}\theta$

d) $\operatorname{Csc}\theta$

e) n.a

9. Reducir:

$$R = \frac{8(1 - \operatorname{Cos}^4x - \operatorname{Sen}^2x)}{1 - \operatorname{Cos}^4x - \operatorname{Sen}^4x}$$

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) n.a

10. Calcular:

$$N = [\operatorname{Csc}\alpha(\operatorname{Csc}\alpha - \operatorname{Sen}\alpha)][\operatorname{Sec}\alpha(\operatorname{Sec}\alpha - \operatorname{Cos}\alpha)]$$

a) 1

b) 3

c) 5

d) 7

e) n.a

11. Eliminar x si:

$$a \operatorname{Sen} x - \operatorname{Cos} x = 1$$

$$b \operatorname{Sen} x + \operatorname{Cos} x = 1$$

a) $ab=1$ b) $\frac{a}{b}=1$ c) $a=b$

d) $\frac{a}{b}=2$ e) n.a