



DIVISIÓN DE POLINOMIOS I

Es aquella operación que tiene por finalidad hallar una expresión denominada “cociente”, dadas otras dos denominadas “dividendo” y “divisor”, tal que, el valor numérico del dividendo es igual al producto de los valores numéricos del divisor y el cociente, más el valor numérico del resto para cualquier sistema de valores atribuidos a sus letras.

$$D(x) \equiv d(x) \cdot q(x) + R(x)$$

ó

$$\frac{D(x)}{d(x)} \equiv q(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$$

Donde:

- $D(x)$ = Dividendo
- $d(x)$ = Divisor
- $q(x)$ = Cociente
- $R(x)$ = Resto o residuo

CLASES DE DIVISIÓN

1. División exacta:

Es división exacta $\Leftrightarrow R(x) \equiv 0$

Luego:

$$D(x) \equiv d(x) \cdot q(x)$$

2. División Inexacta:

Es división inexacta $\Leftrightarrow R(x) \neq 0$

Luego:

Observación: Si $R(x) \equiv 0$, tenemos

$D(x) \equiv d(x) \cdot q(x)$, luego podemos decir:

- $d(x)$ es divisor de $D(x)$
- $d(x)$ es factor de $D(x)$
- $D(x)$ es divisible por $d(x)$

Ejemplo:

El Polinomio $d(x) = x-1$, es un factor de $D(x)=3x^2+2x-5$

Pues, $D(x)$ es divisible por $d(x)$, es decir:

$$\frac{D(x)}{d(x)} = \frac{3x^2 + 2x - 5}{x - 1} \Rightarrow R(x) \equiv 0$$

PROPIEDADES DE GRADO

1. El grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor:

$$[q(x)]^0 = [D(x)]^0 - [d(x)]^0$$

2. El grado del residuo es siempre menor que el grado del divisor, su máximo grado es una unidad menor que el grado del divisor (a excepción de los Polinomios homogéneos).

$$R_{MÁX} = [d(x)]^0 - 1$$

3. El término independiente del dividendo estará determinado por el producto de los términos independientes del divisor y el cociente más el término independiente del residuo.

$$T.I.(D) = T.I.(d) \cdot T.I.(q) + T.I.(R)$$

CASOS QUE SE PRESENTAN EN LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS

- I. División de Monomios.**- Para dividir dos monomios, se dividen los signos (según la ley de signos) luego se dividen los coeficientes y por último las partes literales de acuerdo a la ley de exponentes.

Ejemplos:

$$* \frac{8x^5y^5}{4xyz^2} = 2xy^4z^{-2}$$

$$* \frac{-36a^mb^n}{6ab^2} = -6a^{m-1}b^{n-2}$$

- II. División de un polinomio entre un Monomio.**- Para dividir un Polinomio entre un monomio se divide cada uno de los términos del polinomio separadamente entre el monomio divisor y se suman algebraicamente cada uno de éstos resultados.

Ejemplo: Dividir:

$$P = \frac{42x^6y^5 + 21x^3y^7 - 35x^5y^2}{7xy^2}$$

Resolución:

$$P = \frac{42x^6y^5}{7xy^2} + \frac{21x^3y^7}{7xy^2} - \frac{35x^5y^2}{7xy^2}$$

$$P = 6x^5y^3 + 3x^2y^5 - 5x^4$$

- III. División de dos polinomios.**- La división de polinomios sólo es aplicable para:

- a) Polinomios de una sola variable
- b) Polinomios homogéneos

Se debe tener en cuenta que los polinomios deben ser completos y ordenados en forma decreciente, con respecto a una letra llamada “ORDENATRIZ”, si faltase alguna variable se remplazarán por ceros.

Para dividir dos polinomios se utilizan los siguientes métodos:

1. Método clásico o General
2. método de los coeficientes separados
3. Método de los coeficientes indeterminados.
4. Método de Horner
5. Método de Ruffini

ESTUDIO DE CADA UNO DE LOS MÉTODOS

1. **Método clásico ó general.**- Para dividir dos polinomios mediante éste método se debe tener en cuenta las siguientes reglas:
 - a. Ordenar tanto el dividendendo como el divisor según las potencias, decrecientemente con respecto a una variable.
 - b. En caso de faltar una potencia de la variable se coloca en su lugar el término faltante con coeficiente cero.
 - c. Dividir el primer término del dividendendo por el primer término del divisor para obtener el primer término del cociente.
 - d. Este término se multiplica por cada uno de los términos del divisor y se pasan a restar con los correspondientes términos del dividendendo.
 - e. Tratar el resto obtenido en el paso (d), como si fuera un nuevo dividendendo y repetir los pasos (c) y (d).
 - f. Continuar este proceso hasta que el resto obtenido sea tal que su grado resulte menor que el del divisor (o que sea cero), dando el proceso como terminado.

Ejemplo: Dividir:

$$a^2+2a^4-3a^3+a-2 \text{ entre } a^2-3a+2$$

Resolución:

$$\begin{array}{r}
 2a^4 - 3a^3 + a^2 + a - 2 \quad | a^2 - 3a + 2 \\
 \underline{-2a^4 + 6a^3 - 4a^2} \\
 3a^3 - 3a^2 + a \\
 \underline{-3a^3 + 9a^2 - 6a} \\
 6a^2 - 5a - 2 \\
 \underline{-6a^2 + 18a - 12} \\
 13a - 14
 \end{array}$$

$\therefore q(x) = 2a^2 + 3a + 6$
 $R(x) = 13a - 14$

2. **Método de los coeficientes separados.**- En este caso, además de las consideraciones anteriores se debe tener en cuenta:

- Se trabaja solamente con los coeficientes y sus correspondientes signos del dividendo y divisor.
- En caso de faltar un término con una potencia de la variable se coloca en su lugar cero, tanto en el dividendo como en el divisor.
- De esta manera se obtienen los coeficientes con sus signos del polinomio cociente.
- Para determinar el grado del cociente y resto se aplican las propiedades.

$$\begin{aligned}
 [q(x)]^\circ &= [D(x)]^\circ - [d(x)]^\circ \\
 [R(x)]^\circ &= [d(x)]^\circ - 1
 \end{aligned}$$

Ejemplo: Dividir.

$$\begin{array}{r}
 6a^5 - 20a^4 - 13a^3 + 25a^2 - 12a + 7 \\
 \hline
 3a^2 - a + 1
 \end{array}$$

Resolución:

$$\begin{array}{r}
 6 - 20 - 13 + 25 - 12 + 7 \quad | \quad 3 - 1 + 1 \\
 -6 + 2 - 2 \quad 2 - 6 - 7 + 8 \\
 -18 - 15 + 25 \\
 +18 - 6 + 6 \\
 -21 + 31 - 12 \\
 +21 - 7 + 7 \\
 24 - 5 + 7 \\
 -24 + 8 - 8 \\
 3 - 1
 \end{array}$$

- $[q(x)]^\circ = [D(x)]^\circ - [d(x)]^\circ$
 $[q(x)]^\circ = 5 - 2 = 3$
- $[R(x)]^\circ = [d(x)]^\circ - 1$
 $[R(x)]^\circ = 2 - 1 = 1$

$$\begin{aligned}
 q(x) &= 2a^3 - 6a^2 - 7a + 8 \\
 R(x) &= 3a - 1
 \end{aligned}$$

3. **Método de los coeficientes indeterminados.**- Este método consiste en plantear el resultado con coeficientes desconocidos, basándose en la identidad fundamental de la división algebraica.

$$D=d.q+R$$

El cociente (q) y residuo (R) se asumen que son conocidos con coeficientes indeterminados para poder establecer la identidad.

Ejemplo: Dividir:

$$\underline{6x^4-x^3-17x^2+5x-3}$$

$$3x^3+4x^2-2x-1$$

Resolución

- Análisis de Grados:

$$[q_{(x)}]^{\circ} = 4 - 3 = 1$$

$$[R_{MÁX}]^{\circ} = 3 - 1 = 2$$

∴ $q_{(x)}$ y $R_{(x)}$ son de la forma:

$$q_{(x)} = ax+b \dots\dots\dots (I)$$

$$R_{(x)} = cx^2+dx+e \dots\dots\dots (II)$$

- Sabemos que: $D=d.q+R$, para nuestro caso:

$$\underbrace{6x^4 - x^3}_{D_{(x)}} - \underbrace{17x^2 + 5x}_{d_{(x)}} - \underbrace{3}_{q_{(x)}} \equiv \underbrace{(3x^3 + 4x^2 - 2x - 1)}_{R_{(x)}} \underbrace{(ax + b)}_{q_{(x)}} + \underbrace{(cx^2 + dx + e)}_{R_{(x)}}$$

- Realizando operaciones en el segundo miembro y agrupando convenientemente.

$$6x^4-x^3-17x^2+5x-3 \equiv 3ax^4+(4a+3b)x^3+(-2a+4b+c)x^2+(-a-2b+d)x+(-b+e)$$

Identificando coeficientes:

i) $6=3a \Rightarrow a=2$

ii) $-1=4a+3b \Rightarrow b=-3$

iii) $-17=-2a+4b+c \Rightarrow c = -1$

iv) $5=-a-2b+d \Rightarrow d = 1$

v) $-3=-b+e \Rightarrow e=-6$

∴ $q_{(x)} = ax+b = 2x-3$

$$R_{(x)} = cx^2+dx+e = -x^2+x-6$$

CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTOS

I. Por el método clásico

1. Dividir:

$$7m - 3 + 2m^4 - m^3 \text{ entre } 2m + 3$$

Resolución:

$$\text{Rpta. } q_{(m)} = m^3 - 2m^2 + 3m - 1$$

$$R_{(m)} = 0$$

2. Dividir:

$$\frac{4a^5 + 4a + 4a^2 + 4a^4 + 3a^3 - 1}{3a^2 + a + 2a^3 - 1}$$

Resolución:

$$\text{Rpta. } q_{(a)} = 2a^2 - a + 2$$

$$R_{(a)} = a^2 + a + 1$$

3. Dividir:

$$\frac{20m^3 - 16m + 8 - 2m^2}{4m - 2}$$

Resolución:

$$\text{Rpta. } q_{(m)} = 5m^2 + 2m - 3$$

$$R_{(m)} = 2$$

I. Por el método de los coeficientes separados

4. Dividir:

$$\frac{y^5 + 2y^4 - y^2 + 3}{y^2 - 2y + 1}$$

Resolución:

$$\text{Rpta. } q_{(y)} = y^3 + 4y^2 + 7y + 9$$

$$R_{(y)} = 11y - 6$$

5. Dividir:
 $2m^5 - m^5n + 3m^3n^2 + 16m^2y^3 - 8mn^4 + 3n^5$
 entre $m^3 - 2m^2n + 5mn^2 - n^3$

Resolución:

Rpta. $q_{(m,n)} = 2m^2 + 3mn - n^2$
 $R_{(m,n)} = m^2n^3 + 2n^5$

6. Dividir:
 $38a^4 - 65a^3 + 27$
 entre $2a^2 - 5a + 3$

Resolución:

Rpta. $q_{(a)} = 19a^2 + 15a + 9$
 $R_{(a)} = 0$

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Dividir: $4m^3 + 3m - 2$
 entre $2m^2 - 3m + 5$ y dar como respuesta la suma del cociente y el residuo

- a) $6m - 6$ b) $10m - 5$ c) $2m + 3$ d) $10m + 5$
 e) N.A.

2. Hallar el cociente de la división:

$$\frac{2a^4 - a^3 - 3 + 7a}{2a + 3}$$

- a) $a^3 - a^2 + a - 5$ b) $a^3 - 2a^2 + 3a - 1$
 c) $a^3 + 2a^2 + 3a - 1$ d) $a^3 + 2a^2 + a + 1$
 e) N.A.

3. ¿Por cuánto hay que multiplicar:
 $(5n^2 + 1 - n)$ para obtener
 $(25n^3 + 1 + 4n)$?

- a) $4n + 1$ b) $3n + 1$ c) $6n + 1$
 d) $5n + 1$ e) N.A.

4. ¿Cuánto vale "k" si la división

$$\frac{3m^3 - m^2 - 3m + k}{3m^2 + 2m - 1}; \text{ es exacta?}$$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) N.A.

5. Hallar: "m" y "n" en:

$K(a) = 2a^3 + 3a^2 - na + m$; sabiendo que es divisible por: $(2a^2 - 1 - a)$; indicar (m + n)

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) N.A.

6. Hallar el cociente de la división:

$$\frac{6m^2 - 2n^2 - mn}{n + 2m}$$

- a) m+n b) m-n c) 3m-2n
d) 3m+2n e) N.A.

7. Indicar el menor coeficiente del cociente obtenido al dividir:
 $(32a^5 - 1)$ entre $(2a + 1)$

- a) -4 b) -6 c) -8
d) -2 e) N.A.

8. Calcular (x+y); en:

$R(m) = 6m^5 + 11m^4 - 2m^2 + xm + y$; sabiendo que es divisible por $(3m^2 + m - 3)$

- a) -3 b) -5 c) -7
d) -1 e) N.A.

9. Proporcionar el residuo de dividir:

$$\frac{12m^3 + 5m - 6m^2 + 7}{m - 1}$$

- a) 16 b) 18 c) 14
d) 10 e) N.A.

10. ¿Para que valor de "a" el polinomio:

$K(m) = 2m^4 - 5m^3 + am + 6$, será divisible por $(m - 1)$?

- a) 11 b) 9 c) 13
d) 15 e) N.A.