DIVISIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

ALGEBRA

1. División de un polinomio entre un monomio:

Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada uno de los términos del polinomio separadamente entre el monomio divisor y se suman algebraicamente cada uno de estos resultados.

Ejemplo 1:

Dividir: $\dfrac{42x^6y^5 - 21x^3y^7 + 35x^5y^2}{7xy^2}$

<u>Resolución</u>:

$$\frac{42x^6y^5 - 21x^3y^7 + 35x^5y^2}{7xy^2} = \frac{42x^6y^5}{7xy^2} - \frac{21x^3y^7}{7xy^2} + \frac{35x^5y^2}{7xy^2}$$

$$= 6x^5y^3 - 3x^2y^5 + 5x^4$$

Ejemplo 2:

Dividir: $\dfrac{0{,}8x^2y^2 - 1{,}2x^4y - 0{,}6x^6}{-2x^2}$

<u>Resolución</u>:

$$\frac{0{,}8x^2y^2 + 1{,}2x^4y - 0{,}6x^6}{-2x^2} = \frac{0{,}8x^2y^2}{-2x^2} + \frac{1{,}2x^4y}{-2x^2} - \frac{0{,}6x^6}{-2x^2}$$

$$= -0{,}4y^2 - 0{,}6x^2y + 0{,}3x^4$$

Ejemplo 3: Dividir: $\dfrac{x^2y^4 - 2xy^3 + 4y^2}{\frac{3}{2}y^2}$

<u>Resolución</u>:

$$\frac{x^2y^4 - 2xy^3 + 4y^2}{\frac{3}{2}y^2} = \frac{x^2y^4}{\frac{3}{2}y^2} - \frac{2xy^3}{\frac{3}{2}y^2} + \frac{4y^2}{\frac{3}{2}y^2}$$

$$= \frac{2}{3}x^2y^2 - \frac{4}{3}xy + \frac{8}{3}$$

Ejemplo 4: Dividir: $(30x^2y^3 - 42x^3y^4 - 10x)$
entre: $6y^2$

<u>Resolución</u>:

$$\frac{30x^2y^3 - 42x^3y^4 - 10x^6}{6y^2} = \frac{30x^2y^3}{6y^2} - \frac{42x^3y^4}{6y^2} - \frac{10x}{6y^2} = 5x^2y - 7x^3y^2 - \frac{5x}{3y^2}$$

2. **División de dos Polinomios:**

Para dividir dos polinomios tenemos la siguiente regla práctica:

1) Se ordenan el dividendo y el divisor, según una misma letra, dejando espacios para los términos que faltan.

2) Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor para obtener el primer término del cociente.

3) Se multiplica el primer término obtenido del cociente por todo el divisor y el producto se resta del dividendo. Para ello se coloca cada término de este producto debajo de su semejante cambiándole de signo. Luego se suman algebraicamente.

4) Se divide el primer término del residuo, entre el primer término del divisor, para obtener el segundo término del cociente.

5) Este segundo término se multiplica por todo el divisor y este producto se resta del residuo anterior.

6) Se divide el primer término del segundo residuo entre el primer término del divisor y se efectúan las operaciones como en los pasos anteriores continuando hasta que

7) el residuo sea un polinomio de grado menor que el divisor.

Ejemplo 1:

Dividir: $7x - 3 + 2x^4 - x^3$ entre $2x + 3$

Resolución:

Ordenamos el primer polinomio con respecto a la letra "x" y en sentido decreciente.

$2x^4 - x^3 + 0x^2 + 7x - 3$ entre $2x + 3$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4 - x^3 + 0x^2 + 7x - 3 & 2x + 3 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^4 - 3x^3} & x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \\
\quad -4x^3 + 0x^2 & \\
\quad \underline{+4x^3 + 6x^2} & \\
\qquad +6x^2 + 7x & \\
\qquad \underline{+6x^2 - 9x} & \\
\qquad\quad -2x - 3 & \\
\qquad\quad \underline{+2x + 3} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$\therefore$ El cociente buscado es: $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$; con residuo cero.

Ejemplo 2:

Dividir: $4x + 4x^2 + 4x^4 + 3x^3 + 4x^5 - 1$ entre $3x^2 + x + 2x^3 - 1$

Resolución:

Ordenando ambos polinomios con respecto a la letra "x" y en sentido decreciente, tenemos:

$$
\begin{array}{l|l}
4x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 4x - 1 & 2x^3 + 3x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^5 - 6x^4 - 2x^3 + 2x^2} & 2x^2 - x + 2 \\
\quad - 2x^4 + x^3 + 6x^2 + 4x & \\
\quad \underline{+ 2x^4 + 3x^3 + x^2 - x} & \\
\qquad + 4x^3 + 7x^2 + 3x - 1 &
\end{array}
$$

$$\begin{array}{r} +\,4x^3 - 6x^2 - 2x + 2 \\ \hline x^2 + x + 1 \end{array}$$

$\therefore$ Cociente $Q(x) = 2x^2 - x + 2$
Residuo $R(x) = x^2 + x + 1$

Otra forma de expresar el resultado de una división es dando el cociente completo (Qc)

$$\boxed{Qc = Q(x) + \frac{R(x)}{divisor}}$$

El cociente completo en el ejemplo anterior sería:

$$\boxed{Qc = 2x^2 - x + 2 + \frac{x^2 + x + 1}{2x^3 + 3x^2 + x - 1}}$$

OBSERVACIONES

1. El grado del cociente es igual a la diferencia de los grados del dividendo y el divisor.
2. El grado de la letra **ordenatriz** en el residuo es siempre menor que el grado relativo de la letra ordenatriz, en el divisor y su máximo grado es menor en uno que el grado de este último.

Ejemplo 3:

Dividir: $2x^6 - 3x^5y + 5x^4y^2 + 5x^3y^3 - 6x^2y^4 + 3xy^5 + 2y^6$ entre $x^3 - 2x^2y + 4xy^2 - y^3$

<u>Resolución</u>:

Como los polinomios ya están ordenados con respecto a "x" y en sentido decreciente.

$$\begin{array}{l|l}
2x^6 - 3x^5y + 5x^4y^2 + 5x^3y^3 - 6x^2y^4 + 3xy^5 + 2y^6 & x^3 - 2x^2y + 4xy^2 - y^3 \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^6 + 4x^5y - 8x^4y^2 + 2x^3y^3} & 2x^3 + x^2y - xy^2 + y^3 \\
\quad +x^5y - 3x^4y^2 + 7x^3y^3 - 6x^2y^4 & \\
\quad \underline{-x^5y + 2x^4y^2 - 4x^3y^3 + x^2y^4} & \\
\qquad -x^4y^2 + 3x^3y^3 - 5x^2y^4 + 3xy^5 & \\
\qquad \underline{+x^4y^2 - 2x^3y^3 + 4x^2y^4 - xy^5} & \\
\qquad\qquad + x^3y^3 - x^2y^4 + 2xy^5 + 2y^6 & \\
\qquad\qquad \underline{+ x^3y^3 + 2x^2y^4 - 4xy^5 + y^6} & \\
\qquad\qquad\qquad x^2y^4 - 2xy^5 + 3y^6 &
\end{array}$$

$\therefore$ Cociente $Q(x,y) = 2x^3 + x^2y - xy^2 + y^3$
Residuo $R(x,y) = x^2y^4 - 2xy^5 + 3y^6$

Luego: Cociente completo: Qc = $2x^3 + x^2y - xy^2 + y^3 + \dfrac{x^2y^4 - 2xy^5 + 3y^6}{x^3 - 2x^2y + 4xy}$

Observaciones:

1) El grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor.
2) El grado absoluto del residuo de una división de polinomios homogéneos es igual al grado absoluto del dividendo.
3) El grado relativo de la letra ordenatriz en el residuo es como máximo uno menor que el grado relativo de la letra ordenatriz en el divisor.

CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTOS

1. Desarrolla las divisiones indicadas:

   a) $(z^2 x + zx + x) \div -z$

   b) $(-4x^2y + 6xy^2 - 10y^3) \div -2x =$

   c) $(-8x^3 + 16x^2y^2 - 32xy^3) \div 4xy$

   d) $(4x^2y - 63y^2 + 10xy^4) \div -2xy$

   e) $(-15x^6y^3z + 20x^4y^4z^3 - 10x^5 y^2z^2) \div -5x^4 y^2z$

2. Desarrolla las siguientes divisiones:

   a) $\dfrac{8x^2 - 24xy}{8x}$

   b) $\dfrac{3xy^3 - 5x^2y^2 + 4x^2y^3z}{-xy^2}$

   c) $\dfrac{15x^6y^2 - 10x^4y^3z^5 - 20x^2y^5z^6}{5x^2y^2}$

   d) $\dfrac{\frac{3}{8}x^4y + x^3y^3 - \frac{1}{2}x^2y^5z}{\frac{3}{4}x^2y}$

3. Las siguientes divisiones son exactas. Halla el polinomio cociente en cada división:
   a) $(3y^3 - 10y^2 + 20y - 16) \div (3y - 4)$
   b) $(2x^4 - x^3 + 7x - 3) \div (2x + 3)$
   c) $(6y^2 - 9y - 27) \div (3y - 9)$

d) $(8y^3 - 27) \div (2y - 3)$
e) $(x^6 - 7x^3 + 12) \div (x^3 - 3)$

ALGEBRA

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Efectúa las siguientes divisiones:

   a) $(3xy^2 - 2x^2y^2 + 5x^3y - 7x^4) \div 2xy$
   b) $(12x^3y^3 - 15x^2y^2 + 18x) \div -3xy$
   c) $(-6x^3y^2z^4 + 9x^2y^3z^2 - 3xy^2z^3) \div -3xy^2 z^2$
   d) $(18x^4y^3z^2 - 24x^2y^2z^3 + 36x^3y^3z^2) \div 6x^2y^2z^2$
   e) $(20x^{n+1} y^n - 16x^{n+2} y^{n+1}) \div 4x^n y^n$

2. Desarrolla las siguientes divisiones:

   a) $\dfrac{5x^2 - 10x}{5x}$

   b) $\dfrac{-6x^3y^2 + 9x^4y^4z - 12x^2yz^3}{-3xy}$

   c) $\dfrac{\frac{5}{7}x^4y^3z - \frac{2}{9}x^3y^4z - \frac{3}{4}x^2y^5}{-\frac{2}{3}x^2y^2}$

   d) $\dfrac{-z^n w^n + 2z^{n+1}w^{n+1}}{-z^n w^n}$

   e) $\dfrac{45x^{n-3} - 15x^{n-2} - 25x^{n+1}}{-5x^{n-3}}$

3. Hallar el polinomio cociente en cada división, si son exactas:

   a) $(6x^2 - x - 2) \div (2x + 1)$

   b) $(z^2 - 15z + 56) \div (z - 8)$

   c) $(-10z^3 - 13z^2 + 13z - 2) \div (-5z + 1)$

   d) $(9x^3 + 3x^2 + x - 1) \div (3x - 1)$

   e) $(38x^4 - 65x^3 + 27) \div (2x^2 - 5x + 3)$

   f) $(12x^4 - 7x^3 - 74x^2 - 7x + 12) \div (3x^2 - 7x - 4)$