ALGEBRA

COCIENTES NOTABLES

Son aquellas divisiones algebraicas en las cuales el cociente y el residuo de la división se obtienen sin mediar algoritmo correspondiente, o sea sin necesidad de efectuar la operación.
La división es exacta (esto es, el resto es nulo).

Estos casos especiales son de la forma general.

$$\boxed{\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}}$$

Donde: x, a son las bases

$n \in N \wedge n \geq 2$

Condiciones que deben cumplir

a) Deben tener las bases iguales.

b) Deben tener los exponentes iguales.

Así: $$\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$$

Numéricamente: $$\frac{x^{10} \pm a^{10}}{x \pm a}$$

CASOS DE COCIENTES NOTABLES

Existen cuatro casos de cocientes notables, que se determinan combinando convenientemente los signos; las cuales son:

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} \;;\; \frac{x^n + a^n}{x-a} \;;\; \frac{x^n + a^n}{x+a} \;;\; \frac{x^n - a^n}{x+a}$$

PRIMER CASO: $$\boxed{\frac{x^n - a^n}{x-a}}$$

A. **Cálculo del Resto**: Por el teorema del resto.

$x-a = 0 \Rightarrow x = a$

$R=a^n - a^n = 0$

$\therefore R=0$

Esto indica que para cualquier valor entero de "n", será siempre exacta por lo tanto es un cociente notable.

B. **Cálculo del cociente**:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + ... + xa^{n-2} + a^{n-1}$$

Donde "n" es par o impar

Ejemplo: Calcular el cociente en forma directa de:

$$\frac{x^4 - a^4}{x - a} = x^3 + x^2a + xa^2 + a^3$$

SEGUNDO CASO:

$$\boxed{\frac{x^n + a^n}{x - a}}$$

A. **Cálculo del resto**: Por el teorema del resto.

$x\text{-}a=0 \Rightarrow x=a$

$R=a^n+a^n$

$\therefore\ R=2a^n\neq 0$

Vemos que en éste caso para cualquier valor de "n" el resto es siempre diferente de cero por lo cual el cociente que se obtiene será siempre un cociente completo y nunca un cociente exacto.

B. **Cálculo del cociente**:

$$\frac{x^n + a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + ... + a^{n-1} + \frac{2a^n}{x - a}$$

Donde "n" es par o impar.

Importante*: Excluiremos el presente caso debido a que la división no es exacta, en consecuencia no es un cociente notable.*

TERCER CASO:

$$\boxed{\frac{x^n + a^n}{x + a}}$$

A. **Cálculo del Resto**: Por el teorema del resto.

$x+a=0 \Rightarrow x=\text{-}a$

$R=(\text{-}a)^n+a^n$

Si:n=# par $\Rightarrow$ $R=a^n+a^n=2a^n\neq 0$ (cociente completo)

Si:n=# impar $\Rightarrow$ $R=\ \text{-}a^n+a^n=0$ (cociente exacto):

B. **<u>Cálculo del cociente</u>**.-

$$\frac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \ldots - xa^{n-2} + a^{n-1}$$

Donde "n" es impar.

Ejemplo: Calcular el cociente en forma directa de:

$$\frac{x^5 + a^5}{x + a} = x^4 - x^3a + x^2a^2 - xa^3 + a^4$$

<u>CUARTO CASO</u>: $$\frac{x^n - a^n}{x + a}$$

A. **<u>Cálculo del resto</u>**.- Por el teorema del resto.

$x+a=0 \Rightarrow x=-a$

$R=(-a)^n-a^n$

Si:n = # par $\Rightarrow =a^n-a^n=0$ (cociente exacto)

Si:n = # impar$\Rightarrow R=-a^n-a^n=-2a^n \neq 0$(cociente completo)

B. **<u>Cálculo del cociente</u>**.-

$$\frac{x^n - a^n}{x + a} = x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \ldots + xa^{n-2} - a^{n-1}$$

Donde "n" es par.

FÓRMULA DEL TÉRMINO GENERAL

Es una fórmula que nos permite encontrar un término cualquiera en el desarrollo de los cocientes notables sin necesidad de conocer los demás:

Sabemos que:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \underbrace{x^{n-1}}_{t_1} + \underbrace{x^{n-2}a}_{t_2} + \underbrace{x^{n-3}a^2}_{t_3} + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}$$ Donde:

$t_1=x^{n-1}=x^{n-1}a^o$

$t_2=x^{n-2}a=x^{n-1}a^1$

$t_3=x^{n-3}a^2=x^{n-3}a^2$

$\vdots$

$t_{69}=\ldots\ldots..=x^{n-69}a^{68}$

En General

$$t_k = \underbrace{\bigcirc}_{\text{signo}}\, x^{n-k}a^{k-1} \qquad ; \quad 1 \le k \le n$$

Donde: K→ es el lugar pedido

N → es el exponente de las bases en el numerador

El signo → se colocará de acuerdo al caso que corresponda.

REGLA PARA EL SIGNO

a) Cuando el divisor es de la forma (x-a):

Todos son positivos (+)

b) Cuando el divisor es de la forma (x+a) y si:

K=# impar ⇒ (positivo +)
K=# par ⇒ (negativo -)

Ejemplo: En el cociente notable de:

$$\frac{x^{60}-y^{60}}{x-y}$$

Hallar el término de lugar 15.

Resolución:

Recordando en $\frac{x^n - y^n}{x-y} \Rightarrow t_k = x^{n-k}y^{k-1}$

En el problema $n=60 \wedge k=15$

$\Rightarrow t_{15} = x^{60-15} \cdot y^{15-1}$

$\therefore t_{15} = x^{45}y^{14}$

LEYES DE UN COCIENTE NOTABLE:

I. Si la división tiene la forma que origina un cociente notable, el exponente que se repite en el dividendo indica el número de términos del cociente.

a) $\frac{x^{100}-y^{100}}{x-y} \Rightarrow \#$ de términos $=100$

b) $\frac{x^{200}-y^{300}}{x^4-y^6} \Rightarrow \frac{(x^4)^{50}-(y^6)^{50}}{x^4-y^6}$

de términos = 50

ALGEBRA

II. El cociente se caracteriza por ser completo y ordenado respecto a sus bases; además de ser homogéneo respecto a las mismas.

III. El primer término del desarrollo se obtiene dividiendo el primer término del dividendo entre el primero del divisor.

IV. A partir del segundo término los exponentes de la primera base disminuyen de uno en uno, mientras que los de la segunda van aumentando de uno en uno.

V. Si el divisor es un binomio diferencia (x-a) todos los términos del cociente serán positivos; pero si es un binomio suma (x+a) los términos del cociente serán alternados (los de lugar impar positivos y los de lugar par negativos).

VI. Solo cuando "n" es impar, las bases del término central tendrán igual exponente.

<u>Ejemplo</u>:

$$\frac{x^7 - a^7}{x - a} = x^6 + x^5a + x^4a^2 + x^3a^3 + x^2a^4 + xa^5 + a^6$$

VII. Para calcular un término cualquiera contando de derecha a izquierda, sólo basta con intercambiar las bases tanto en el numerador como en el denominador, para luego aplicar la fórmula del término general.

<u>Ejemplo</u>: Calcular el término 35 contando a partir de derecha a izquierda del desarrollo de:

$$\frac{x^{121} - a^{121}}{x - a}$$

<u>Resolución:</u>

Intercambiando las bases:

$$\frac{a^{121} - x^{121}}{a - x}$$

Luego: $t_{35}=a^{121-35}x^{35-1}=x^{34}a^{86}$

VIII. Si: $\frac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q}$ origina un cociente notable

Entonces se cumple: $\boxed{\frac{m}{p} = \frac{n}{q}}$

Además: $\boxed{\frac{m}{p} = \frac{n}{q} = \text{número de términos}}$

<u>Ejemplo</u>: si $\frac{x^{n+1} - y^{200}}{x^2 - y^4}$ origina un cociente notable, calcular el valor de "n".

Resolución

* Como origina un cociente notable:

$\frac{n+1}{2} = \frac{200}{4} \Rightarrow$ n+1=(50)(2)

n=100-1

n = 99

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Efectuar: $\frac{m\sqrt{m}+8}{\sqrt{m}+2}$

   Resolución:
   Rpta. $m - 2\sqrt{m} + 4$

2. Hallar el número de términos del desarrollo de: $\frac{a^{12}-64}{a^2-2}$

   Resolución

Rpta: El cociente tendrá 6 términos

3. Hallar el 5to término del desarrollo de: $\frac{m^{12}-64}{m^2-2}$

   Resolución :
   Rpta: $t_5 = 16m^2$

2. Calcular el valor de "m" en: $\frac{y^{2m+2}-z^{3m}}{y^{m+1}-z^{2m-1}}$; para que sea un cociente notable:

   Resolución :

Rpta. m = 2

3. Hallar el término 25 en el desarrollo del cociente notable: $\frac{m^{150}-n^{100}}{m^3+n^2}$

   Resolución:
   Rpta. $t_{25} = m^{75} n^{48}$

ALGEBRA

ALGEBRA

6. Hallar el número de términos que tiene el desarrollo del cociente notable:

$$\frac{m^{4^3} - n^{4^4}}{m^2 - n^{2^3}}$$

Resolución:
Rpta. El cociente notable tiene 32 términos

REFORZANDO
MIS CAPACIDADES

1. Hallar el número de términos del desarrollo de: $\frac{m^{15} - 2^5}{m^3 - 2}$

a) 10 b) 5 c) 15
d) 20 e) N.A.

2. ¿Cuántos términos admite el desarrollo del cociente notable?

$$\frac{m^{25n} - x^{25n+25}}{m^n - x^{n+1}}$$

a) 5 b) 25 c) 50
d) 75 e) N.A.

3. Indicar el valor de verdad:

I. $\frac{m^3 - n^3}{m+n}$, es un C.N. exacto

II. $\frac{m^{31} - n^{31}}{m+n}$, es un C.N. no exacto

III. $\frac{m^5 + n^x}{m+n}$, es un C.N. si x = 5

a) VVV b) FFV c) FFF
d) FVV e) N.A.

4. Determina el valor de "k" si la expresión es un C.N. $\frac{x^{k+54} + y^{357}}{x^4 + y^{17}}$

a) 10 b) 20 c) 30
d) 40 e) N.A.

ALGEBRA

5. Hallar el 7mo término del C.N.

$$\frac{m^{33}-n^{363}}{m^{3}-n^{33}}$$

a) $m^3 n^3$ b) $m^{12}n^{198}$ c) $m^{30}n^{31}$
d) $m^{15} n^{17}$ e) N.A.

6. Hallar el 5to término del desarrollo del C.N.:

$$\frac{m^{p}-n^{p+40}}{m^{2}+n^{3}}$$

a) m^4n^4 b) $m^{70}n^{12}$ c) $m^{12}n^{70}$
d) $m^{10}n^{37}$ e) N.A.

7. Hallar el 10mo término del desarrollo del C.N.:

$$\frac{m^{q}-n^{4q-60}}{m^{3}+n^{9}}$$

a) $-m^{30} n^{81}$ b) $-m^3 n^8$
c) $m^8 n^3$ d) $m^{28} n^{82}$ e) N.A.

8. ¿Cuántos términos tiene el desarrollo del C.N?

$$\frac{x^{4m+12}-y^{4m-3}}{x^{m-8}-y^{m-9}}$$

a) 5 b) 10 c) 15
d) 20 e) N.A.

9. Calcular "m" en: $\dfrac{a^{4m+4}-b^{5m}}{a^{m+1}-b^{2m-3}}$

Para que sea un C.N

a) 10 b) 2 c) 4
d) 6 e) N.A.

10. Hallar el t_6 del desarrollo del C.N. $\dfrac{m^{28}+128n^{7}}{m^{4}+2n}$

a) $-32m^{24} n^6$ b) $32m^4 n^4$
c) $64m^7 n^6$ d) $-32m^4 n^5$ e) N.A.