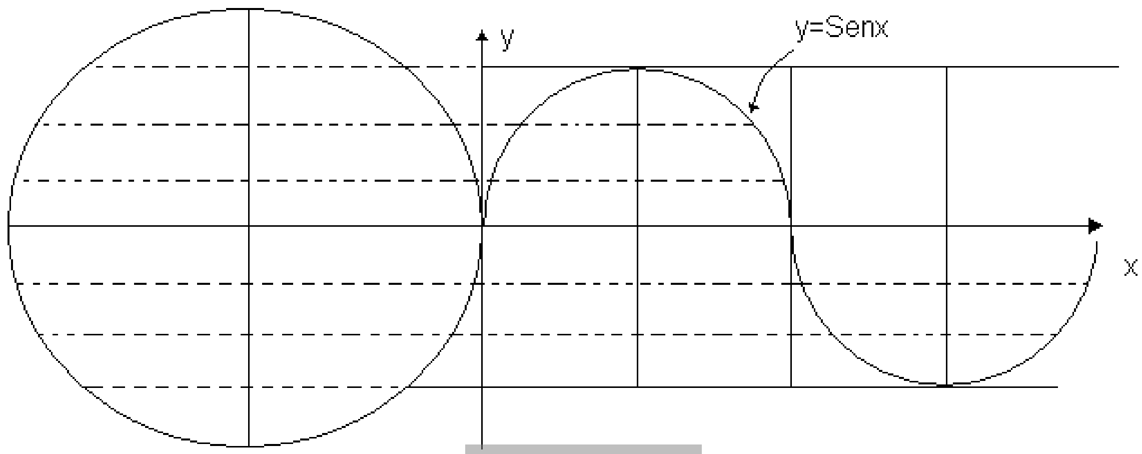
TRIGONOMETRIA

# CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA

Al finalizar el presente capitulo Ud. será capaz de:

1. Conocer el concepto de Circunferencia Trigonométrica, así como sus elementos.
2. Identificar las líneas trigonométricas en cada cuadrante así como sus variaciones.
3. Resolver problemas.




$$x^2 + y^2 = 1$$

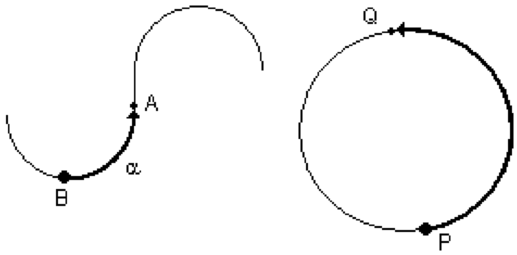
*En los capítulos anteriores se estudiaron las razones trigonométricas de ángulos; existe sin embargo, otro concepto muy importante el de las razones trigonométricas de números reales. La diferencia principal entre ambos conceptos radica en la etimología de argumento. Las representaciones trigonométricas de números reales es de amplia importancia en la matemática. Analiza la teoría y resuelve con entusiasmo y concentración los problemas.*

**LA CAIDA DEL QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES**

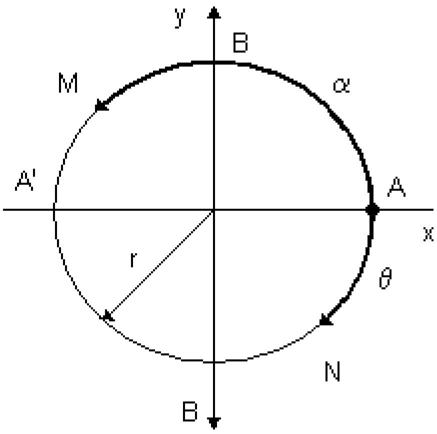
Recordemos que ELEMENTOS se llamo la magistral colección de libros que en 13 tomos escribió EUCLIDES en el siglo III A.c. en Alejandría, ciudad situada en el delta del Nilo. Euclides, matemático griego, era en aquellos tiempos maestro del rey de Egipto Ptolomeo y sus libros han dado la vuelta al mundo en siglos sucesivos; venerados por los árabes, los ELEMENTOS se convirtieron en la Biblia científica de la baja Edad Media primero, y en el punto de partida de los pensadores renacentistas después. En los nueve primeros libros Euclides se encarga de proponer axiomas o postulados a partir de los cuales se elabora toda una doctrina, pero el quinto postulado origino ya mas de un problema; este dice:"Por un punto exterior a una recta pasa una y solo una paralela a dicha recta". En 1733 Saccheri hizo notar que este postulado era equivalente a afirmar que: "La suma de los ángulos de un triangulo es igual a dos rectos" acercándose ligeramente a la verdad ya que después Bolilla, Gauss, Lobatchevsky y Riemann aportaron la respuesta correcta a esta cuetios. Todos ellos desde su propio punto de vista atacaron el 5º postulado de Euclides, básicamente a partir del siguiente hecho: Una regla apoyada sobre la superficie de una esfera (nuestro planeta) es un arco de circulo, y una recta por consiguiente, es un circulo completo, es decir: un circulo máximo. Paralelo estaríamos dibujando un circulo máximo y estos siempre se intersectan. Esto hace también pensar que por la imprecisión de nuestros instrumentos de medida, Euclides afirmaba que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triangulo equivale a la de dos ángulos rectos, lo que no se cumple si un triangulo es enorme. Euclides dijo su verdad, pero solo para figuras pequeñas y en el plano, más vivimos en un universo curvado, ¡Ese es nuestro mundo real! Newton y Einstein han contribuido en la comprobación de la curvatura del universo pero aun se sigue discutiendo el tipo de curvatura que adopta, mas el aporte de Euclides fue realmente valiosa.

## CONCEPTOS PREVIOS

1. **ARCO ORIENTADO: E**s la trayectoria descrita por un punto al desplazarse sobre una curva, en un determinado sentido. Estos arcos tienen un origen y un extremo.
   Para "$\alpha$" : $B \to$ Origen
   $A \to$ Extremo
   Para "$\beta$" : $P \to$ Origen
   $Q \to$ Extremo




**ARCO EN POSICION NORMAL**: Son arcos orientados que se determinan en una circunferencia canónica; con origen en el punto "A" que es el punto de interseccion del eje X con la circunferencia, según se muestra en la figura; los cuales pueden tomarse en sentido antihorario (+) o en sentido horario (-), pc.

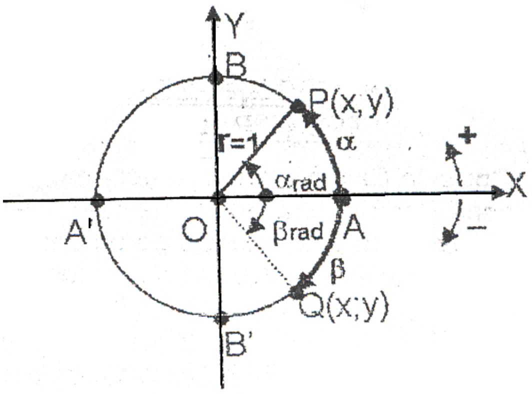



- "$\alpha$"$\wedge$ "$\theta$" son arcos en posición normal.
- "$\alpha$" : positivo
  "$\theta$": negativo
- "M" y "N" extremos de arco

> ***OJO***: *Estudiar a la circunferencia unitaria (r =1) es lo mismo que estudiar a la circunferencia Trigonométrica.*

## CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA

TRIGONOMETRIA




**ELEMENTOS**

O (0,0) : Origen
A (1,0) : Origen de arcos
B (0,1) : Origen de complementos de arcos
A' (-1,0) : Origen de suplementos de arcos
B' (0-1) : Sin nombre especial
P (x,y) : Extremos de arco
Q (x,y)
$\alpha$ : (+) $\wedge$ $\beta$ : (-)

Siendo un punto de la circunferencia trigonométrica (C.T) cuyas coordenadas son (x;y) y el radio r= 1 se cumple que:

$$\boxed{X^2 + y^2 = 1}$$

$\Rightarrow$ Ecuación de la C.T.

Ejemplos: Determinar cual de los siguientes puntos pertenece a la C.T.

❶ $P\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ ❷ $M\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$

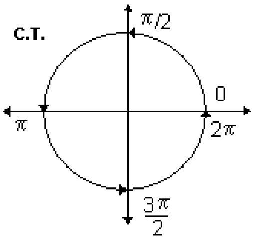
## LOS NUMEROS REALES SOBRE LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA

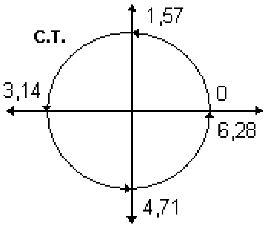
En la matemática muchas veces realizamos aproximaciones, como:

$\pi = 3{,}14$; $2\pi = 6{,}28$

$\frac{\pi}{2} = 1,\ 57$ $\qquad 3\pi/2 = 4,\ 71$

A continuación presentamos un grafico en el que estos números aproximados sean ubicados sobre la circunferencia Trigonométrica.




Observamos que ambas graficas son equivalentes:

Por lo tanto tomando como referencia dichos gráficos: Ubicar aproximadamente $\pm 1$ ; $\pm 3$ $\pm 5 \pm 7$

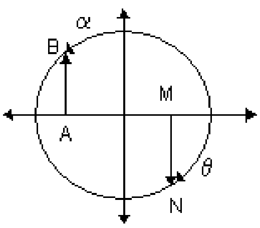
**TOMA NOTA**: usualmente en el lenguaje matemático no se escribe rad. Sino se sobre entiende, ejemplos:

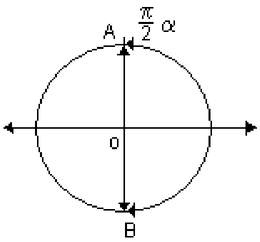
$\boxed{1 \leq Cos\alpha \leq +1}$

$\angle$ AOB = 2 en lugar de $\angle$ AOB= 2 rad, Sen $\frac{\pi}{4}$ en lugar de Sen $\frac{\pi \text{rad}}{4}$

*REPRESENTACION DE LAS RAZONES TRIGONOMETRICAS (LINEAS) EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA.*

**SENO**: Es la Ordenada del extremo del Arco.



AB=Sen$\alpha$(+)

MN=Sen$\theta$ (-)

$-1 \leq$ Sen$\alpha \leq 1$

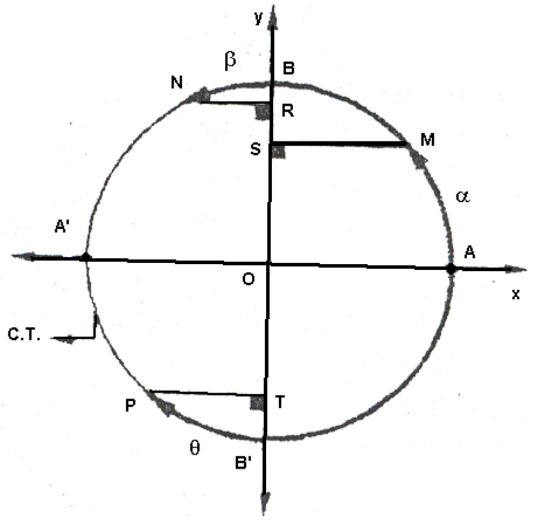
OA=Sen $\frac{\pi}{2}$ (+)

OB=Sen(-$\beta$)(-)

Sen(Max)=1

Sen(Min)=-1

**COSENO**: Es la Abcisa del extremo del Arco.
En el grafico, tenemos entonces que:



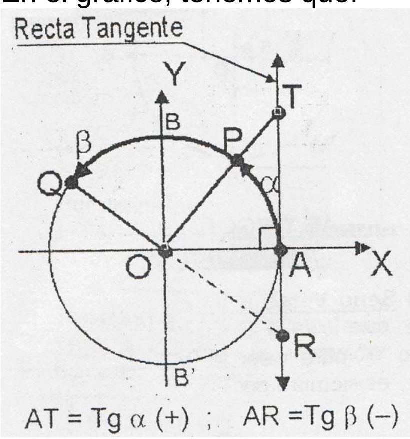

MS=Cos$\alpha$(+)

NR=Cos$\beta$(-)

PT=Cos$\theta$(-)

$$- \begin{cases} (Cos\alpha)_{\max} = 1 \\ (Cos\alpha)_{\min} = -1 \end{cases}$$

**TANGENTE**: Es la ordenada del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el origen de arcos y la prolongación de radio que pasa por el extremo del arco.
En el grafico, tenemos que:



TRIGONOMETRIA

Debe notarse que la L.T. Tangente puede ser trazada para cualquier arco "$\alpha$" excepto para los extremos de arco B y B' ($\alpha \varepsilon \Re$ - $[2n+1]\pi/2$), ya que en esos puntos la recta tangente nunca se cortara con la prolongación de los radios debido a que son paralelas, cumpliéndose además:

$$\boxed{-\infty < Tg\alpha < +\infty} \begin{cases} (Tg\alpha)_{max} = +\infty \\ (Tg\alpha)_{min} = -\infty \end{cases}$$

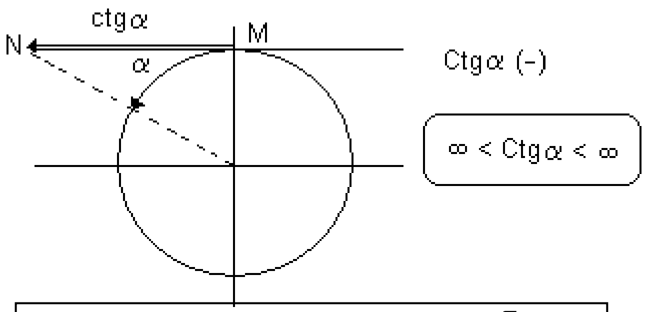
Ejemplo 1: Graficar Sen 2 ; Sen $\frac{4\pi}{3}$

**Ejemplo 2:** Con la ayuda de la C.T. Graficar: Cos 70º ; Cos 220º

**Ejemplo 3**: Graficar

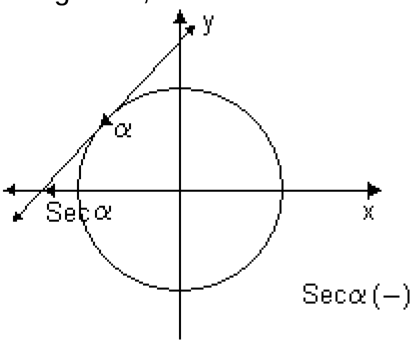
Tan 2 ; Tan $\frac{\pi}{4}$

**COTANGENTE**: Es la abcisa del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el origen de complementos y la prolongación del radio que pasa por el extremo del arco.

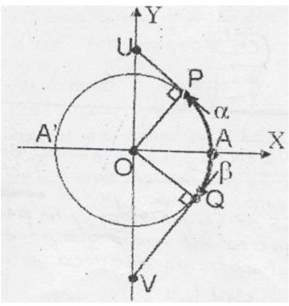



**Ejemplo 4**: Graficar Ctg 2 ;   Ctg $\frac{-\pi}{4}$

**<u>LINEA SECANTE:</u>** Es la abscisa del punto de intersección entre la recta tangente que pasa por el extremo del arco y el eje "X".
En el grafico, tenemos entonces que:




$+1 \leq \text{Sec}\alpha \leq -1$
**<u>COSECANTE:</u>** Es la ordenada del punto de intersección del eje y con la recta tangente trazada por el extremo del arco.



OU = Csc $\alpha$ (+); OV = Csc $\beta$ (-), Debe notarse que la L.T. Cosecante puede ser trazada para cualquier arco "$\alpha$" excepto para los extremos de arco A y A¡ ($\alpha \varepsilon \Re - n\pi$), ya que la Tangente geométrica que pase por estos puntos nunca se cortara con la abscisa o eje "Y", debido a que son paralelas, cumpliéndose además:

$\boxed{\begin{array}{l} -\infty < Csc\alpha \leq -1 \\ +1 \leq Csc\alpha < \infty \end{array}}$ $\begin{cases} (Csc\alpha)_{max} = +\infty \\ (Csc\alpha)_{min} = -\infty \end{cases}$

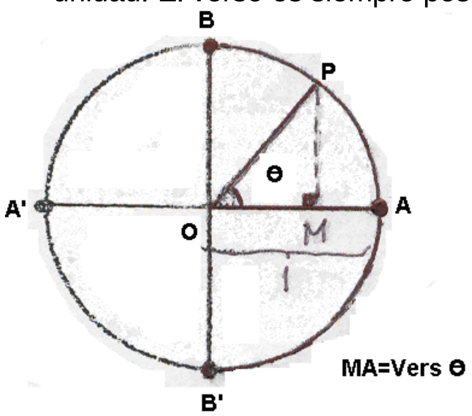
Es lo mismo que:

$\boxed{Csc\alpha \leq -1 \quad \vee \quad Csc\alpha \geq 1}$

**<u>Ejemplo 5</u>**: Graficar: Sec 2,5 $\wedge$ Csc 3

**LINEAS TRIGONOMETRICAS AUXILIARES**

1. Seno Verso o Verso (Vers): Es lo que le falta al Coseno de un arco "$\theta$" para valer la unidad. El verso es siempre positivo.




Por definición:

$\boxed{Vers\ \theta = 1 - Cos\ \theta}$ $\quad \forall\ \theta \varepsilon R$

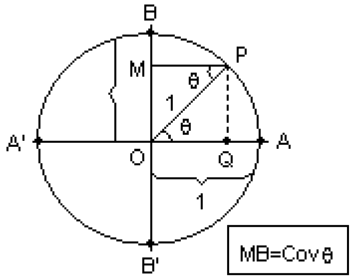
Teniendo en cuenta lo anterior, se llega a deducir la variación del Verso:

$\boxed{0 \leq vers\ \theta \leq 2}$

<u>Ejemplo 6</u>: Calcular

Ver $\left[\dfrac{\pi}{3}\right]$

2. Coseno Verso o Coverso (Vov): Es lo que falta al Seno de un arco “ θ ” para valer la unidad. El Coverso es siempre positivo.




Por definición:

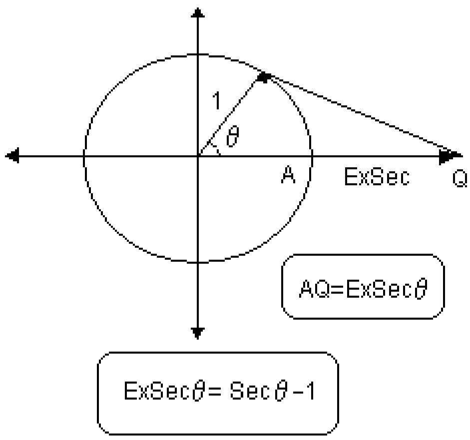
$\boxed{\text{Cov}\ \theta = 1 - \text{Sen}\ \theta}$ $\forall\ \theta\ \varepsilon\ R$

Teniendo en cuenta lo anterior, se llega a deducir la variación del Coverso:

$\boxed{O \leq \text{Cov}\ \theta \leq 2}$

Ejemplo 7.

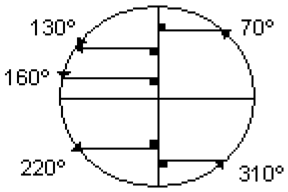
3. Ex -Secante o External: Es el execeso de la Secante respecto a la unidad.Si la Secante se mide hacia la derecha del origen de arcos entonces la Ex – Secante es positiva de lo contrario es negativo.




Ejemplos:

1. Con la ayuda de una C.T. señale la expresión de menor valor entre:
   a) Cos70º b) Cos130º c) Cos160º
   d) Cos220º e) Cos12º

***Resolución:***
Graficamos en la C.T los arcos mencionados y ubicamos en ella las líneas trigonométricas coseno y observamos que:



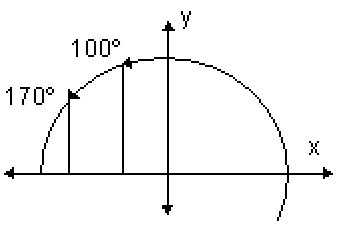

Cos70º y cos310º: son (+)
Cos130º, cos160º y cos220º son(-)

∴ entre los negativos notamos que el menor o más negativo es Cos160º.

2. Señale verdadero (v) o falso (f), según corresponda:
   I. Sen100º > Sen 170º
   II. Cos100º > Cos 140º
   III. Sen210º > cos 210º

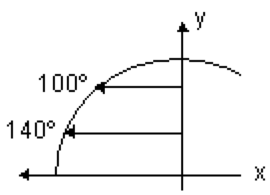
***Resolución:***
Cada caso lo representaremos en una C.T.

I)



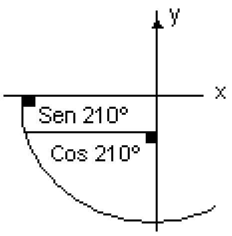

Sen100º > Sen 170º

II)




Por ser más negativo cos140º
Cos 100º > Cos 140º

III)



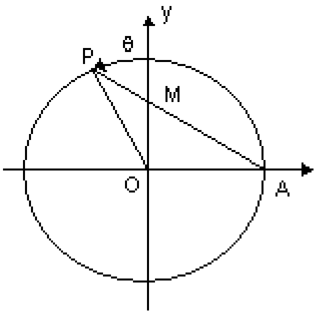
Observamos que sen 210º y Cos 210º son negativos pero Cos210º es más negativo:

$\therefore$ Sen210º > Cos 210º
Después de analizar cada caso se tiene:

I) V     II) V     III) F

3. En la C.T. mostrada expresar en términos de $\theta$.

a) La longitud del segmento OM

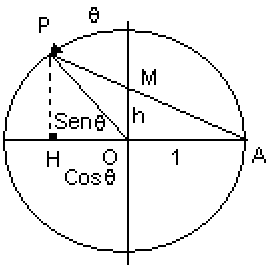



***Resolución:***
En el gráfico se puede reconocer:

◣ AOM ~ ◣ AHP

$$\frac{h}{|\text{sen}\theta|} = \frac{1}{1+|\cos\theta|}$$

$$h = \frac{|\text{sen}\theta|}{1+|\cos\theta|}$$




Donde:

$|\text{sen}\theta| = \text{sen}\theta \quad |\cos\theta| = -\cos\theta$

$$\therefore\ h = \frac{\text{sen}\theta}{1-\cos\theta}$$

TRIGONOMETRIA

**CONSTRUYENDO**

**MIS CONOCIMIENTOS**

1. En la C.T. ubicar los arcos indicados.

   a) $2\pi/3$
   b) $7\pi/2$
   c) $-2\pi/3$

2. Representar aproximadamente los siguientes números reales en la C.T.

   a) 1,5
   b) $\sqrt{3}$

3. Indicar (V) o (F) en las siguientes expresiones y verificar la respuesta en la C.T.

Sen 45º < sen 170º ……. ( )

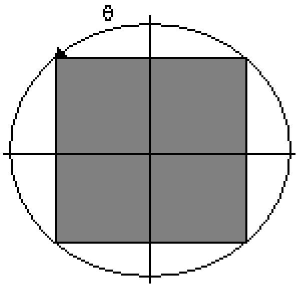
Cos $\frac{\pi}{10}$ < cos 110º ……. ( )

Cos $\frac{12\pi}{5}$ > cos 73º ……. ( )

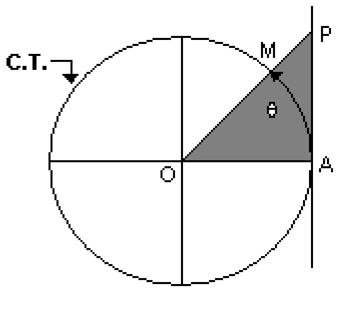
Tan $\frac{7\pi}{3}$ > tan $\frac{\pi}{3}$ ……….. ( )

Csc (-3210º) < Csc (-10º)

4. En que cuadrante(s) el seno decrece y es negativo.
5. Calcular el área sombreada (ABCD) es cuadrado:




6. Del gráfico hallar el área del triángulo sombreado.



7. Indicar el orden creciente de los siguientes valores.
   Tan 1, Tan 2 Tan 3

**REFORZANDO**

**MIS CAPACIDADES**

1. En la C.T. ubicar los arcos indicados:

   a) $\frac{5\pi}{6}$   b) $\frac{7\pi}{5}$   c) $\frac{24\pi}{5}$

   d) $\frac{-2\pi}{3}$   e) $\frac{4\pi}{5}$   f) $\frac{-\pi}{7}$

2. Representar aproximadamente los siguientes números reales en la C.T.

   a) 1,3   b) 2   c) 4

   d) $\frac{-3}{2}$   e) -1,1   f) 0,5

3. Indicar V o F según la expresión. Verifica tu respuesta en la C.T.

   Sen 30º > sen 120º …..   (  )
   Tan 30º > tan 120º ……   (  )
   Sen 125º < sen $\frac{2\pi}{3}$ …..   (  )

4. Determinar el mayor valor:

   a) Cos 50º   b) Cos 580º   c) Sen 310º
   d) Sen 590º   e) Cos 980º

5. Indicar el signo de comparación que debe ir en el círculo:

   Sen 1 ○ Tan 1

   a) >   b) <   c) ≤
   d) ≤   e) =

6. ¿Qué signo de comparación debe ir en el círculo?

   Sen 50º ○ Sen 150º

   a) >   b) <   c) ≤
   d) ≤   e) =

7. ¿Qué signo de comparación debe ir en el círculo?

   Sen 200º ○ Sen 300º

   a) >   b) <   c) ≤
   d) ≤   e) =

8. ¿Qué signo de comparación debe ir en el círculo?

   Sen 250º ○ Cos 250º

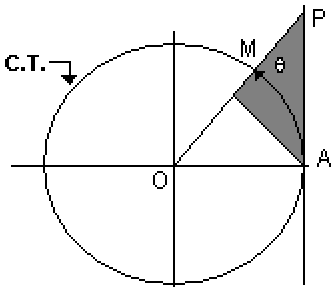
   a) > b) < c) ≤
   d) ≤ e) =

9. ¿Qué signo de comparación debe ir en el círculo?

   |Sen 300º| ○ Cos 300º

   a) > b) < c) ≤
   d) ≤ e) =

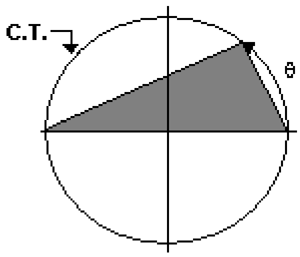
10. Del gráfico, hallar el área del triángulo sombreado.



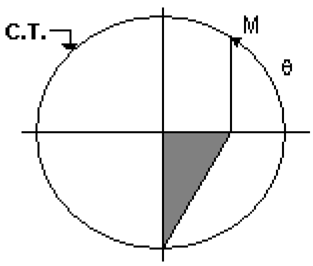

   a) 0,5 (Senθ-Cosθ)
   b) 0,5 (1-Senθ) Tanθ
   c) 0,5 (1-Cosθ)Tanθ
   d) 0,5 (1-Cosθ)ctgθ
   e) 0,5 (1-Senθ)ctgθ

**CIRCUNFERENCIA TRIGONOMETRICA II**

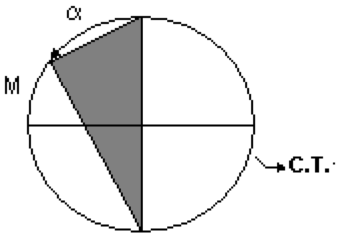
1. En la C.T. hallar el área de la región sombreada en función de θ.




2. Hallar el área de la región sombreada en función de θ.



3. Calcular el área de la región sombreada.



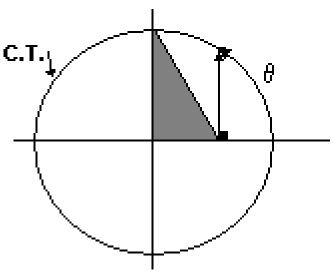

4. Indicar: A-B siendo:

A: el mínimo valor de $2Cos\theta+Sen\theta$
B: el máximo valor de $3Senx+Cosx$

**REFORZANDO**

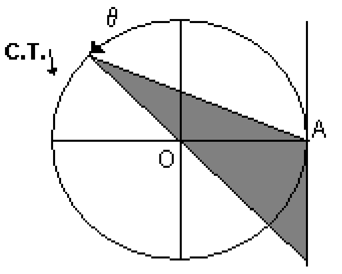
**MIS CAPACIDADES**

1. Indicar el signo de comparación debe ir en el círculo.
   Tg1 ○ Tg 2
   a) > b) < c) ≤
   d) ≤ e) =
2. Indicar el orden creciente de los siguientes valores: Tag1: Tg2; Tg3
   a) Tg1; Tg2; Tg3
   b) Tg1; Tg3; Tg2
   c) Tg3; Tg2; Tg1
   d) Tg3; Tg1; Tg2
   e) Tg2; Tg3; Tg1
3. Indicar el máximo valor que puede tomar la expresión.
   $E=3Senx - 2Cosy - 5Tg^2z$
   a) 2 b) 3 c) 5
   d) 7 e) 10
4. Indicar el signo de comparación que debe ir en el círculo.
   Sen1 ○ Tg 1
   a) > b) < c) ≤
   d) ≤ e) =
5. Indicar el mínimo valor de:
   $A=Cosx + Cosy - Cosz$
   a) 1 b) -1 c) 2
   d) -2 e) n.a.
6. Hallar el área de la región sombreada en función de $\theta$.



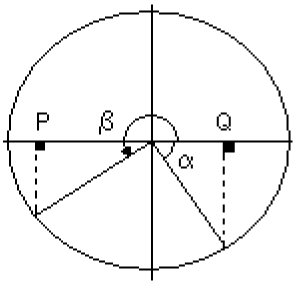

a) $cos\theta$ b) $sen\theta$ c) $0,5Cos\theta$
d) $0,5Sen\theta$ e) n.a

7. Calcular el área sombreada.




a) 0,5(senθ-1)Tanθ
b) 0,5(Cosθ-1)Tanθ
c) 0,5(1+Senθ)Tanθ
d) 0,5(1-Cosθ)Tanθ
e) 0,5(1-Cosθ)Senθ

8. Calcular la longitud del segmento PQ.




a) Cosα+Cosβ
b) Cosα-Cosβ
c) Senα+Senβ
d) Senα-Senβ
e) Senβ+Cosα

9. Calcular el área del cuadrilátero MFOG.