



ÁNGULOS VERTICALES Y HORIZONTALES

A. Ángulos verticales

Son aquellos ángulos que se determinan en un plano vertical (plano que contiene al observador, a una recta horizontal y al objeto observado). Para mediciones angulares en un plano vertical, se consideran los ángulos de elevación y depresión.

- **Ángulo de elevación:**

Es el ángulo vertical formado por la línea horizontal y la línea de mira que pasa por el punto de observación. El punto observado está por encima de la horizontal.

α : ángulo de depresión

- **Ángulo de depresión:**

Es el ángulo vertical formado por la línea horizontal y la línea de mira que pasa por el punto de observación. El punto observado está debajo de la horizontal.

β : ángulo de elevación

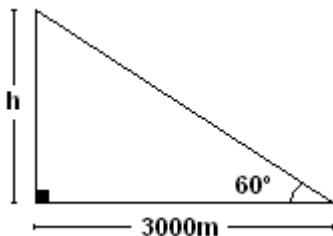
Observación:

- La estatura del observador no se tomará en cuenta a menos que el problema lo indique.
- Se denomina ángulo de observación a aquel que está constituido por 2 visuales.

Ejemplos:

1. Un avión está sobrevolando un puesto de observación que se encuentra a: 3,000m de una batería antiaérea, si desde la batería el ángulo de elevación del avión es de 60° . Encontrar la altura a la cual se halla el avión.

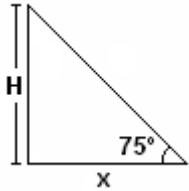
Solución:



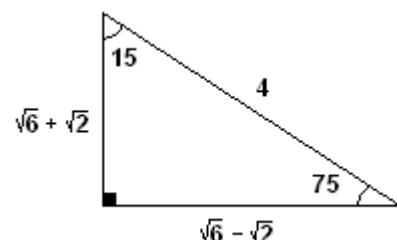
$$\begin{aligned} \tan 60^\circ &= \frac{h}{300m} \\ \sqrt{3} &= \frac{h}{300m} \\ h &= 3000(\sqrt{3}) \\ h &= 3000(1,73) \\ h &= 5190m \end{aligned}$$

2. Un edificio de H metros de altura se encuentra a una distancia " x " de una persona que sabe que el ángulo de elevación es de 75° . Hallar " x ".

Solución:



Recordemos:



Como pide x :

$$\operatorname{Ctg} 75 = \frac{x}{H}$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{x}{H}$$

Racionalizamos:

$$\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} = \frac{x}{H}$$

$$\frac{6-2\sqrt{12}+2}{6-2} = \frac{x}{H}$$

$$\frac{8-4\sqrt{3}}{4} = \frac{x}{H}$$

$$\frac{4(2-\sqrt{3})}{4} = \frac{x}{H}$$

$$\therefore x = (2-\sqrt{3})H$$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

Graficando:

1. Un ratoncito observa la parte más alta de un poste en un ángulo de elevación de 30° a 12m de distancia de la base del poste.
2. Sarita observa la parte más alta del 4º piso de un edificio de 10 pisos con un ángulo de elevación de 37° a una distancia de 5m de la base del edificio.
3. Desde la azotea del colegio “San Agustín” Teresita observa un avión con un ángulo de elevación de 30° y una motocicleta con un ángulo de depresión de 60° .

Resolver:

4. Una escalera de 6m de longitud está apoyada sobre una pared formando con esta un ángulo de 30° . Calcular la distancia entre los pies de la escalera y la pared.
5. Desde un punto situado horizontalmente a 70m del pie de una torre se dirige una visual a su parte más alta con un ángulo de elevación de 37° . ¿Cuál es la altura de la torre?
6. Un árbol proyecta una sombra que es uno menos que su altura si el ángulo de depresión es 53° . Calcule la proyección de la sombra.
7. Un nadador se dirige hacia el faro y lo observa con un ángulo de 30° , al avanzar 10m el ángulo de elevación es ahora el doble del anterior. Encuentre la altura del faro.
8. Desde un helicóptero se observan 2 barcos con ángulos de depresión de 30° y 37° si en ese instante el helicóptero se encuentra a 120m ¿Cuál es la distancia entre los barcos?

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

Graficar:

TRIGONOMETRÍA

1. A 180m e la base de un edificio se observa la parte más alta de este con un ángulo de elevación de 37° .
2. Un observador se encuentra a 24m de la base de un poste de 7m de altura ¿Cuál es el ángulo de elevación?
3. Desde lo alto de un edificio de 100m de altura se observa un auto estacionado bajo un ángulo de depresión de 60° .
4. Un hombre cuya estatura es de 1,80m de largo proyecta una sombra de 1,20m de largo; al mismo tiempo un edificio proyecta una sombra de 12,6m.

Resolver:

5. Una antena de TV se encuentra en lo alto de un edificio e 18m de altura. Si un hombre ve con un ángulo de elevación de 53° a la antena y con un ángulo de 45° el edificio. Hallar la longitud de la antena.
a) 6m b) 8m c) 10m
d) 12m e) 14m
6. Desde lo alto de un faro se observa un barco con un ángulo de depresión de 45° ; si luego de que el barco recorrió 70m de este se visualiza la parte superior del faro con un ángulo de elevación de 37° se pide hallar la altura del faro.
a) 215m b) 230m c) 210m
d) 200m e) 225m
7. Calcular el número de pisos de un edificio, si desde un punto situado a una cierta distancia, los ángulos de elevación para el 1er. Piso, mitad del edificio y lo alto del mismo son “ α ”, “ β ” y θ ” respectivamente, cumpliéndose $7(\operatorname{Tg}\alpha + \operatorname{Tg}\beta) = 4\operatorname{Tg}\theta$
a) 7 b) 14 c) 21
d) 15 e) 16
8. Desde un helicóptero se observan 2 barcos con ángulos de depresión de 30° y 37° , si en ese instante el helicóptero se encuentra a 120m ¿Cuál es la distancia entre los barcos?
a) $(3\sqrt{3} - 4)m$ b) $40(3\sqrt{3} - 4)m$
c) $(3\sqrt{3} + 4)m$ d) $(\sqrt{3} + 4)m$
e) $20(3\sqrt{3} - 4)m$
9. Una colina está inclinada un ángulo “ α ” con respecto a la horizontal. Si desde lo alto de la colina se divisa u punto del suelo con un ángulo de depresión θ a una distancia del inicio de la colina igual al doble de 1 altura de esta: $K = \operatorname{Ctg}\theta + \operatorname{Ctg}\alpha$.
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
10. Desde lo alto de un faro de 58m. sobre el nivel del mar se mide el ángulo de depresión hasta un buque obteniéndose 30° . Hallar la distancia a la que está el buque de la base del faro.
a) 105,8m b) 108,2m
c) 108,1m d) 107,7m
e) 100,34,

1. A 240m. de la base de un edificio se observa l aparte más alta de este con un ángulo de elevación de 37° . Calcular la altura del edificio.
2. Desde lo alto de un edificio de 100m de altura se observa un auto estacionado bajo un ángulo de depresión de 60° . Calcular la distancia desde el auto hasta el pie del edificio en el punto que está bajo el observador.
3. Desde lo alto de un edificio se vé un punto en tierra con un ángulo de depresión “ α ” y otro punto ubicado a la mitad entre el primer punto y el edificio con un ángulo de depresión “ $90-\alpha$ ”. Calcular $\text{Ctg}\alpha$.
4. Una persona de 1,50m de estatura observa un árbol con un ángulo de depresión de 30° , su base y con un ángulo de elevación de 60° , su parte superior. Calcular la altura del árbol.

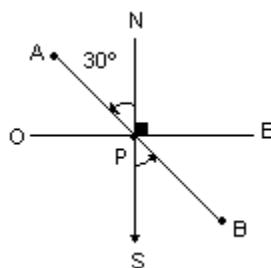
B. Ángulos Horizontales

Se denominan de esta manera a aquellos ángulos que se encuentran sobre un mismo plano (plano horizontal)

Dichos ángulos son de gran uso en la navegación y aviación, puesto que estos se utilizan para expresar los rumbos o direcciones de las naves.

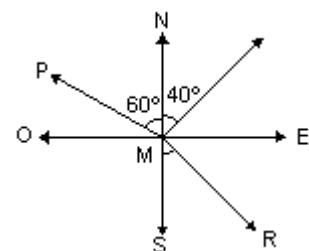
El sistema de referencia de medición de estos ángulos que antiguamente se utilizaba era la rosa náutica o rosa de los vientos y que a partir de la expansión del uso de la brújula magnética, la rosa de los vientos pasó a convertirse en una herramienta auxiliar de aquella.

RUMBO: Se denomina así al ángulo horizontal que forma la línea visual del observador en dirección a un punto u objeto, con la línea o eje de referencia Norte-Sur de los puntos cardinales.



El rumbo de A respecto a P será Norte 30° al Oeste cuya notación será:
N 30° O
 ¿Cuál es el rumbo de B respecto a “P”

Realiza la Notación de los siguientes rumbos.



RUMBO	NOTACIÓN
MP	
MQ	
MR	

Direcciones Principales:

NE - $\frac{1}{4}$ -N

ENE

ESE

SE - $\frac{1}{4}$ S

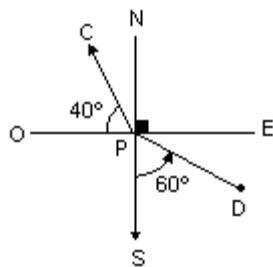
S - $\frac{1}{4}$ SE

S - $\frac{1}{4}$ O

OSO

TRIGONOMETRIA

DIRECCIÓN: Es la inclinación o ángulo que forma una línea con respecto a otra tomada como referencia.



La dirección de C respecto a P es

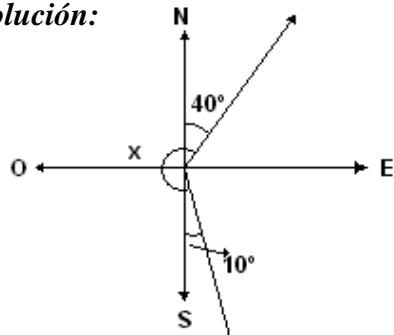
$$\boxed{0 - 40^\circ - \text{N}}$$

La dirección de "D" respecto a P es S-60° - E.

Ejemplos:

- El mayor ángulo que forman N°40°E y S10°E es:

Solución:



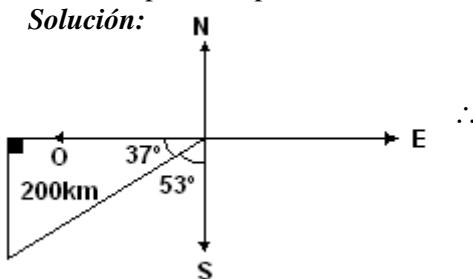
Mayor ángulo "x"

$$x = 180^\circ + 40^\circ + 10^\circ$$

$$x = 230^\circ$$

- Un avión despega de un aeropuerto y vuela 200km en dirección S-53°-O ¿A qué distancia, al Oeste del punto de partida, está el avión en ese instante?

Solución:



$$\cos 37^\circ = \frac{x}{200\text{km}}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{x}{200\text{km}}$$

$$\therefore x = 4(40\text{km})$$

$$x = 160\text{km}$$