

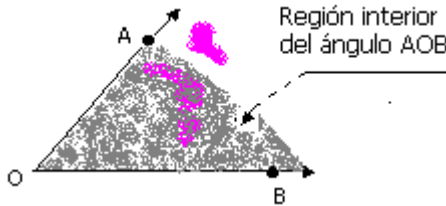


ÁNGULO

Indicador: Identificar todo tipo de ángulo y resolver problemas.

1. DEFINICIÓN

Es aquella figura geométrica formada por dos rayos que tienen el mismo origen. A dichos rayos se les denomina lados y al origen común vértice del ángulo.



Elementos

Lados: \vec{OA} y \vec{OB}

Vértice: O

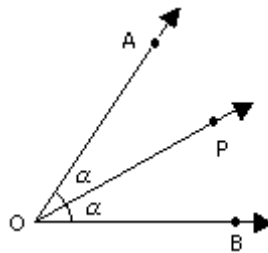
Notación: Ángulo AOB: $\sphericalangle AOB$

Medida del ángulo AOB: $m \sphericalangle AOB$

$$m \sphericalangle AOB = \theta$$

2. BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Es aquel rayo ubicado en la región interior del ángulo cuyo origen es el vértice de dicho ángulo y que forma con sus lados, ángulos de igual medida.



En la figura \vec{OP} :

Bisectriz del ángulo AOB

Entonces:

$$m \sphericalangle AOP = m \sphericalangle POB$$

Pensamiento Matemático

- ❖ <<Las proposiciones matemáticas son parecidas a los de la lógica porque no conciernen a las cosas sobre las que deseemos discutir, sino más bien al modo con que deseamos discutir las>>.

HALM

- ❖ <<Donde quiera que existe un ser racional, existe un matemático>>

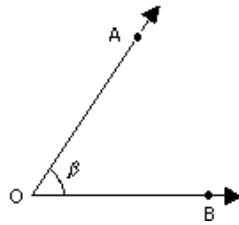
S. Espartaco

3. CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS

I. Según sus medidas

A. Ángulo agudo

Es aquel ángulo cuya medida es mayor que 0° y menor que 90° .

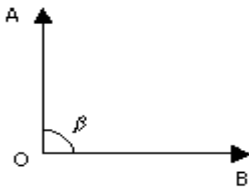


En el gráfico el m \sphericalangle AOB es agudo entonces:

$$0^\circ < \beta < 90^\circ$$

B. Ángulo recto

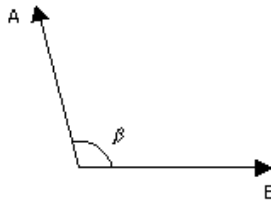
Es aquel ángulo cuya medida es igual a 90° .



$$\beta = 90^\circ$$

C. Ángulo obtuso

Es aquel ángulo cuya medida es mayor a 90° y menor a 180° .



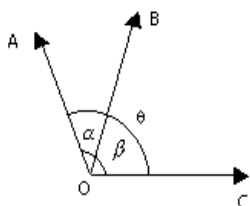
En el gráfico el m \sphericalangle AOB es obtuso entonces:

$$90^\circ < \beta < 180^\circ$$

II. Según la posición de sus lados

A. Ángulos adyacentes

Son dos ángulos que tienen el mismo vértice y además están situados a distinto lado de un lado común.



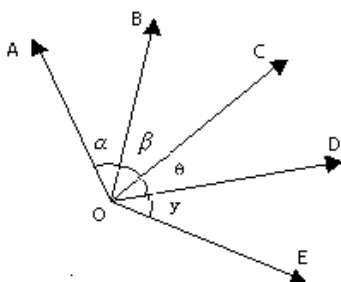
En el gráfico los ángulos AOB y BOC son adyacentes.

Se cumple:

$$\theta = \alpha + \beta$$

B. Ángulos consecutivos

Se denominan así a dos o más ángulos que son adyacentes con su inmediato.

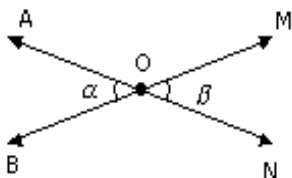


En la figura los ángulos AOB, BOC, COD, y DOE son consecutivos. Entonces:

$$m \angle AOE = \alpha + \beta + \theta + \gamma$$

C. Ángulos opuestos por el vértice

Son dos ángulos que tienen el mismo vértice y además los lados de uno de ellos son prolongaciones de los lados del otro en sentido contrario.



En la figura los ángulos AOB y MON son opuestos por el vértice. Se cumple:

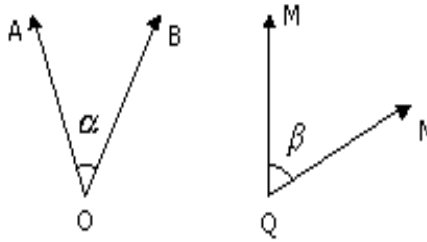
$$m \angle AOB = m \angle MON$$

Es decir:

$$\alpha = \beta$$

D. Ángulos complementarios

Son dos ángulos cuya suma de sus medidas es igual a 90° .



En la figura se tienen los ángulos complementarios AOB y MQN.

Entonces:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

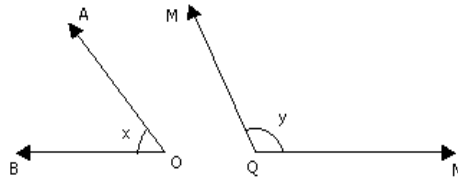
Sea $C(\alpha)$ complemento de α .

Entonces:

$$C(\alpha) = 90^\circ - \alpha$$

E. Ángulos suplementarios

Son dos ángulos cuya suma de sus medidas es igual a 180° .



En la figura se tienen los ángulos suplementarios AOB y MQN.

$$x + y = 180^\circ$$

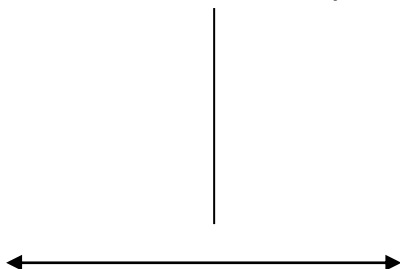
Sea $S(x)$: suplemento de x

Entonces:

$$S(x) = 180^\circ - x$$

Nota:

La distancia de un punto a una recta, es la longitud del segmento perpendicular a dicha recta trazado de dicho punto.

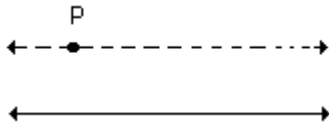


Sea $\overline{PH} \perp$ (H \in); si PH = d

d: distancia de P a

POSTULADO DE PLAYFAIR

Por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una recta paralela a ella.



EJEMPLOS

1. El suplemento de un ángulo más el doble del complemento de dicho ángulo es igual al doble del ángulo mencionado. Hallar el ángulo mencionado.

Resolución:

Sea "x" el ángulo pedido.

Del dato

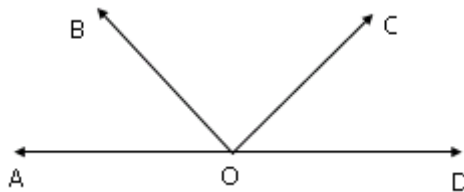
$$180^\circ - x + 2(90^\circ - x) = 2x$$

$$180^\circ - x + 180 - 2x = 2x$$

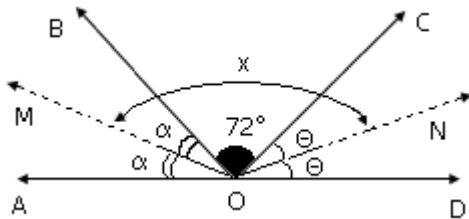
$$360^\circ = 5x$$

$x = 72^\circ$

2. Del gráfico: $m \angle BOC = 72^\circ$. Calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de $\angle AOB$ y $\angle COD$.



Resolución:



Del gráfico:

$$2\alpha + 72^\circ + 2\theta = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\theta = 108^\circ$$

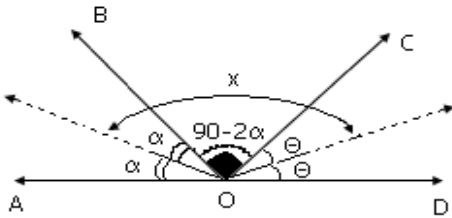
$$\alpha + \theta = 54^\circ$$

$$\rightarrow X = 72^\circ + 54^\circ =$$

$$x = 126^\circ$$

3. Se tienen los ángulos consecutivos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ y $C\hat{O}D$ tal que: $m\angle AOC = m\angle BOD = 90^\circ$. Hallar la medida del ángulo formado por las bisectrices de $A\hat{O}B$ y $C\hat{O}D$.

Resolución:



Del gráfico:

$$m\angle BOC = 90^\circ - 2\theta = 90^\circ - 2\alpha$$

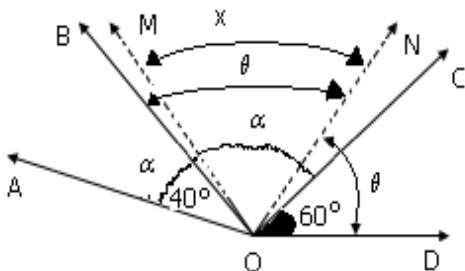
$$\rightarrow \alpha = \theta$$

$$\rightarrow x = \alpha + 90^\circ - 2\alpha + \theta$$

$$x = 90^\circ$$

4. Se tienen los ángulos consecutivos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ y $C\hat{O}D$ tal que: $m\angle AOB = 40^\circ$ y $m\angle COD = 60^\circ$. Hallar la medida del ángulo formado por las bisectrices de consecutivos $A\hat{O}B$ y $B\hat{O}D$.

Resolución:



Del gráfico:

$$\left. \begin{aligned} m\angle AON &= 40^\circ + \theta = \alpha + x \\ m\angle MOD &= \alpha + 60^\circ = x + \theta \end{aligned} \right\} (+)$$

$$100^\circ = 2x$$

$$x = 50^\circ$$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

1. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD, DOE y EOF, cuyas medidas están en progresión aritmética. Hallar la $m\angle COD$. Además $\angle AOF = 180^\circ$

- a) 24° b) 28° c) 32°
 d) 36° e) 40°

Resolución:

2. Se tienen los ángulos consecutivos AOM, MON, NOB y BOC, tal que, \overrightarrow{OM} es bisectriz del ángulo AOB y $2m\angle AON = m\angle AOC$, Hallar la $m\angle MON$, si $m\angle BOC = 30^\circ$

- a) 12° b) 15° c) 16°
 d) 18° e) 20°

Resolución:

3. Si "C" complemento y "S" suplemento siendo: $C\alpha + SC2\alpha + SSC4\alpha = 200^\circ$. Calcular " α ".

- a) 1° b) 2° c) 3°
 d) 4° e) 5°

Resolución:

4. Calcular la medida de un ángulo, si el suplemento del complemento de dicho ángulo excede al 12° al doble de su complemento.

- a) 12° b) 24° c) 36°
 d) 34° e) 48°

Resolución:

5. Se tienen los ángulos consecutivos AOB y BOC. Donde $m\angle AOB - m\angle BOC = 56$. Se trazan las bisectrices \overrightarrow{OM} , \overrightarrow{ON} y \overrightarrow{OR} de los ángulos AOB, BOC y MON, respectivamente. Hallar la medida del ángulo ROB

- a) 14° b) 7° c) 28°
 d) 18° e) 21°

Resolución:

6. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD y DOE. Si $m \angle AOC + m \angle BOD + m \angle COE = 40^\circ$ y $m \angle AOB + m \angle DOE = 16^\circ$. Calcular la $m \angle AOE$.
- a) 14° b) 18° c) 22°
d) 16° e) 28°

Resolución:

**REFORZANDO
MIS CAPACIDADES**

- Si al suplemento del suplemento de un ángulo se le aumenta el complemento de un ángulo cuya medida es la mitad de la medida del primero, ello resulta igual a la tercera parte del suplemento de dicho ángulo aumentado en 60° . Calcule la medida de dicho ángulo.

a) 18° b) 72° c) 36°
d) 54° e) 45°
- Las medidas de dos ángulos adyacentes se diferencian en "a". Calcule la medida del ángulo que forman el lado común a dichos ángulos con la bisectriz del ángulo que forman las bisectrices de estos ángulos.

a) $0,4 a^\circ$ b) $0,25a^\circ$ c) $933 a^\circ$
d) a° e) $0,5 a^\circ$
- Los ángulos consecutivos EOD, DOC, COB y BOA, si $m \angle EOA = 90^\circ$ y las medidas de los ángulos AOB, BOC, COD y DOE están en progresión geométrica de razón 21. Calcule el complemento del \angle determinado por las bisectrices de los ángulos BOC y DOE.

a) 24° b) 56° c) 37°
d) 20° e) 30°
- Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD de modo que: $(m \angle AOB)(m \angle BOD) + (m \angle AOC)(m \angle COD) = (m \angle AOD)(m \angle BOC)$ y $(m \angle AOB)(m \angle COD) = K$. Calcule la $m \angle BOC$.

a) $\sqrt{2k}$ b) $2\sqrt{k}$ c) $\sqrt{3k}$
d) $3\sqrt{k}$ e) \sqrt{k}
- Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD, DOE, EOF y FOG, tal que: $m \angle AOB = m \angle BOC = m \angle COD$; $m \angle DOE = m \angle EOF = m \angle FOG$. Hallar la $m \angle BOE$. Si $m \angle AOD - m \angle EOG = 40^\circ$ y $m \angle AOG = 90^\circ$.

a) 10° b) 20° c) 30°
d) 40° e) 50°
- Si "C" complemento. Calcular "n" en $CC2\alpha + CCCC4\alpha + CCCCC6\alpha + \dots + CCC \dots CCC2n\alpha = 30\alpha$.

a) 5° b) 10° c) 15°
d) 20° e) 30°

7. Se tienen cuatro ángulos consecutivos AOB, BOC, COD y DOA respectivamente, cuyas medidas son proporcionales a los números 2, 3, 5 y 8 respectivamente. Calcular la medida del ángulo que forman las bisectrices del primer y último ángulo.
- a) 50° b) 60° c) 100°
d) 150° e) 135°
8. Se tienen los ángulos complementarios AOB y BOC, tal que $m \angle AOB > m \angle BOC$, se trazan las bisectrices de los ángulos AOB y BOC, \overrightarrow{Or} , \overrightarrow{On} respectivamente, luego se trazan las bisectrices de los ángulos MOB y BON. Hallar la medida del ángulo formado por estas dos últimas bisectrices.
- a) $10^\circ 15'$ b) $18^\circ 30'$ c) $26^\circ 30'$
d) $22^\circ 30'$ e) $7^\circ 30'$
9. Se tienen cinco rayos consecutivos y coplanares \overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC} , \overrightarrow{OD} y \overrightarrow{OE} de manera que $m \angle BOC + m \angle BOD + m \angle COE + m \angle EOB = 500$. Hallar la $m \angle BOD$.
- a) 100° b) 110° c) 120°
d) 130° e) 140°
10. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD y DOE de manera que \overrightarrow{OC} es bisectriz del ángulo BOD y $m \angle AOB = m \angle COE$. Calcular $m \angle AOB$. Si $m \angle DOE + m \angle AOE = 180^\circ$.
- a) 30° b) 45° c) 60°
d) 65° e) 70°