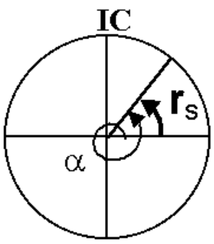
TRIGONOMETRIA

# ACTIVIDADES DE REDUCCION AL PRIMER CUADRANTE

Es el procedimiento mediante el cual, se expresa el valor de las funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud en función de un ángulo agudo del primer cuadrante (ángulo reducido).

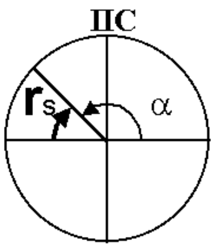
**A. <u>PARA ÁNGULOS POSITIVOS Y MENORES QUE UNA VUELTA</u>**

Para esto usaremos un criterio muy sencillo al que llamaremos el ángulo mas pequeño: Angulo referencial



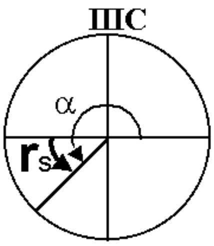

$\alpha = 360º + r_s$

$r_s = \alpha - 360º$



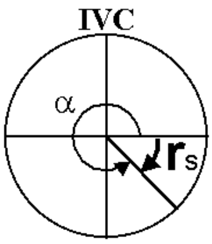

$\alpha = 180º - r_s$

$r_s = 180º - \alpha$




$\alpha = 180º + r_s$

$r_s = \alpha - 180º$




$\alpha = 360º - r_s$

$r_s = 360º - \alpha$

**Pasos a emplear:**

1. Ubicamos el cuadrante al que pertenece $\theta$ (ángulo)
2. Determinamos su ángulo referencial empleando los casos anteriores.
3. Establecemos el signo de la razón trigonométrica en el cuadrante al que pertenece el ángulo

**Ejemplos:**

**1. Reducir al I Cuadrante**

Sen 250º
250º $\in$ III C
Sen 250º es de signo (-)
Angulo referencial:
250 – 180º = 70º
Sen 250º = -Sen 70º

**2.** Calcular el ángulo reducido suplementario de los siguientes ángulos menores de una vuelta:
$\alpha$ =235°, $\beta$ =320°, $\gamma$ =139°, $\delta$ = -145°, $\varphi$ = -298°, $\theta$= -195°.

**Resolución:**
Como $\alpha = 235° \Rightarrow \alpha \in$ IIIC
Luego: $r_S = 235° - 180° = 55°$

Como $\beta = 320° \Rightarrow \beta \in$ IVC
Luego: $r_S = 360° - 320° = 40°$

Como $\gamma = 139° \Rightarrow \gamma \in$ IIC
Luego: $r_S = 180° - 139° = 41°$

Como $\delta = -145° \Rightarrow \delta \in$ IIIC
Luego: $r_S = -145° + 180° = 35°$

Como $\varphi = -298° \Rightarrow \varphi \in$ IC
Luego: $r_S = 360° - 298° = 62°$

Como $\theta = -195° \Rightarrow \theta \in$ IIC
Luego: $r_S = 195° - 180° = 15°$

**B. PARA ÁNGULOS POSITIVOS Y MAYORES QUE UNA VUELTA**
Como la diferencia de dos ángulos coterminales es un número entero de vueltas y cuyo valor es el mismo se procede a resolver de la siguiente manera:

**Ejemplo:**
1. Calcular el ángulo reducido de los siguientes ángulos mayores de una vuelta.

$\alpha$ = 1478º

Dividimos entre 360º

$$\begin{array}{r|l} 1478^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} \underline{1440} & 4 \\ 38^\circ & \end{array}$$

$\boxed{38^\circ \in \text{I C}}$

2. Reducir: $\theta$ = -8595º

$$\begin{array}{r|l} -8595^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} \underline{8280^\circ} & 23 \\ 315^\circ & \end{array}$$

-315 $\in$ IV C

$\therefore$ Su coterminal es 45º

Para entenderlo mejor ten en cuenta los siguientes casos:

## CASOS DE REDUCCIÓN

**1er caso**: Para ángulos positivos menores de una vuelta.
Se tienen los siguientes pasos a seguir:

i) Se determina el cuadrante al que pertenece el ángulo dado.
ii) Se encuentra el ángulo reducido suplementario del ángulo dado.
iii) Se determina el signo que tiene la F.T. del ángulo dado, según el cuadrante al que pertenece, el cual ha sido obtenido en el paso inicial.
iv) El valor de la F.T. del ángulo dado es igual al valor de la F.T. del ángulo reducido suplementario con el signo respectivo determinado en el paso anterior.

### Ejemplos

1. Reducir al primer cuadrante:
   Cos 320°

**Solución:**

Como el ángulo 320° $\in$ IVC
$\Rightarrow$ $r_S$ = 360° - 320° = 40°

Y el signo del Coseno en IV C es **+**

Luego: Cos 320° = +Cos 40°

Aplicando el criterio de Cofunción el resultado puede ser también así:
Como el ángulo 320° $\in$ IVC
$\Rightarrow$ $r_C$ = 320° - 270° = 50°

Y el signo del Coseno en IV C es **(+)**

Luego: Cos 320° = +Sen 50°

Uniendo los dos resultados podemos decir:
$\therefore$ Cos 320° = **+Cos 40°** = **+Sen 50°**

2. Reducir al primer cuadrante:
   Sen ($8\pi/5$)

**Solución:**

Como el ángulo $8\pi/5$ $\in$ IVC
$\Rightarrow$ $r_S = 2\pi - 8\pi/5 = 2\pi/5$

Y el signo del Seno en IV C es **(-)**

Luego: Sen ($8\pi/5$) = -Sen ($2\pi/5$)

Aplicando el criterio de Cofunción el resultado puede ser también así:

Como el ángulo $8\pi/5$ $\in$ IVC
$\Rightarrow$ $r_C = 8\pi/5 - 3\pi/2 = \pi/10$

Y el signo del Seno en IV C es **(-)**

Luego: Sen ($8\pi/5$) = -Cos ($\pi/10$)

Uniendo los dos resultados podemos decir:

$\therefore$ Sen $(8\pi/5)$ = **-Sen $(2\pi/5)$**

= **-Cos $(\pi/10)$**

**<u>2do caso</u>**: Para ángulos positivos mayores de una vuelta.
Se tienen los siguientes pasos a seguir:

i) Se divide el ángulo dado entre 360° ó $2\pi$ y se obtiene el resto de dicha división.

ii) El cuadrante al que pertenece el ángulo dado es el mismo que del ángulo obtenido en el resto de la división realizada en el paso anterior, ya que son coterminales.

iii) El ángulo reducido suplementario del ángulo dado es el mismo que del ángulo obtenido en el resto de la división realizada en el primer paso.

iv) Se determina el signo que tiene la F.T. del ángulo dado, según el cuadrante al que pertenece, el cual ha sido obtenido en el segundo paso.

v) El valor de la F.T. del ángulo dado es igual al valor de la F.T. del ángulo reducido suplementario con el signo respectivo determinado en el paso anterior.

<u>Ejemplos</u>

1. Reducir al primer cuadrante:

Sen 1290°

**Solución**

Efectuando la división obtenemos:

$$\begin{array}{l|l} 1290° & \underline{360°} \\ \underline{1080°} & 3 \\ \ \ 210° \in \text{IIIC} & \end{array}$$

$\Rightarrow$: $r_S = 210° - 180° = 30°$

Y el signo del Seno en III C es **(-)**

Luego: Sen 1290° = -Sen 30°= **-1/2**

Aplicando el criterio de Cofunción el resultado puede ser también así:
Como el ángulo 1290° $\in$ IIIC

$\Rightarrow$ $r_C = 270° - 210° = 60°$

Y el signo del Seno en III C es **(-)**

Luego: Sen 1290° = -Cos 60°= **-1/2**

Uniendo los dos resultados podemos decir:

$\therefore$ Sen 1290° = **-Sen 30°**

**= -Cos 60°= -1/2**

2. Reducir al primer cuadrante:

Tg $(313\pi/3)$

**Solución**

Efectuando la división obtenemos:

$$\begin{array}{l|l} 313\pi/3 & \underline{6\pi/3} \\ \underline{312\pi/3} & 52 \\ \ \ \pi/3 \in \text{IC} & \end{array}$$

$\Rightarrow$: $r_S = \pi/3$

Y el signo de la Tg en I C es **(+)**

–

Luego: Tg $(313\pi/3) = +\text{Tg } \pi/3 = \sqrt{\mathbf{3}}$

Aplicando el criterio de Cofunción el resultado puede ser también así:

Como el ángulo $(313\pi/3) \in$ IC

$\Rightarrow \quad r_C = \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$

Y el signo de la Tg en I C es **(+)**

Luego: : Tg $(313\pi/3) = +\text{CTg } \pi/6 = \sqrt{\mathbf{3}}$

Uniendo los dos resultados podemos decir:

$\therefore$ Tg $(313\pi/3) = \underline{+}\text{Tg } \pi/3 = +\text{CTg } \pi/6$

$= \sqrt{\mathbf{3}}$

**__3er caso__**: Para ángulos negativos.

Se tienen los siguientes pasos a seguir:

i) La F.T. del ángulo negativo se convierte a F.T. del ángulo positivo: con signo mas (+) para el Coseno y la Secante y con signo menos (–) para Seno, Tangente, Cotangente y Cosecante .

ii) Luego se aplican las reglas del 1er ó 2do caso según sea el ángulo positivo resultante menor o mayor de una vuelta .

__Ejemplos__

1. Reducir al primer cuadrante:
   Sen(-210°)

**Solución**

La F.T. del ángulo negativo, lo convertimos a F.T. de ángulo positivo

Sen(-210°) = - [Sen 210°]

Como el ángulo 210° $\in$ IIIC

$\Rightarrow \quad r_S = 210° - 180° = 30°$

Y el signo del Seno en el IIIC es **(-)**

Luego: Sen (-210°) = - [-Sen 30°]

= +Sen 30°=**1/2**

También se puede obtener el resultado considerando el ángulo reducido directamente del ángulo negativo:

Como el ángulo -210° $\in$ IIC

$\Rightarrow \quad r_S = 210° - 180° = 30°$

Y el signo del Seno en el IIC es **(+)**

Luego: Sen (-210°) = +Sen 30°=**1/2**

2. Reducir al primer cuadrante:
   Sec$(-335\pi/8)$

**Solución**

La F.T. del ángulo negativo, lo convertimos a F.T. de ángulo positivo

Sec$(-335\pi/8)$ = Sec$(335\pi/8)$

Efectuando la división obtenemos:

$$\begin{array}{l|l} 335\pi/8 & \underline{16\pi/8} \\ \underline{320\pi/8} & 20 \\ 15\pi/8 \in \text{IVC} & \end{array}$$

$\Rightarrow$: $r_S = 2\pi - 15\pi/8 = \pi/8$

Y el signo de la Sec en el IVC es **(+)**

Luego: Sec($-335\pi/8$)= + **Sec($\pi$/8)**

## OTRO CASO DE REDUCCIÓN

$$\boxed{\begin{array}{l} Rt(90 \pm \alpha) = \pm Co - Rt\ (\alpha) \\ Rt(1800 \pm \alpha) = \pm Rt\ (\alpha) \\ Rt(270 \pm \alpha) = \pm Co - Rt\ (\alpha) \\ Rt(360 \pm \alpha) = \pm Rt\ (\alpha) \end{array}}$$

**Ejemplo:**

1. **Reducir:**

C = $\dfrac{Sen(90+x)}{Cos(180-x)}$

Resolución:
Sen(90+x) = +Cosx
Cos(180-x) = -Cosx

$\therefore$ C = $\dfrac{+Cosx}{-Cosx}$

C = 1

2. Señale el valor de:

L = Tg210°. Sec225°. Cos150°

a) $\sqrt{2}$  b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$  c) $-\sqrt{2}$

d) $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$  e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solución:

$\tan 210° = +\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\sec 225° = -\sec 45° = -\sqrt{2}$

$\cos 150° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$L = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(-\sqrt{2})\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow \therefore L = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. Señale el valor de:

$$C = \cos 1\,200°.\tan 1\,500°$$

a) $\sqrt{3}$  b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$  c) $-\sqrt{3}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  e) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Solución:

$$C = \cos 1\,200°.\tan 1\,500°$$

$$C = \cos 120°.\tan 60° = (-\cos 60°).\tan 60°$$

$$C = \left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3} \rightarrow \therefore C = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. Calcular:

$$L = \text{sen}(-120°)\cos(-240°)\tan(-300°)$$

Solución:

$$L = \text{sen}(-120°)\cos(-240°)\tan(-300°)$$

$$L = (-\text{sen}120°)(\cos 240°)(-\tan 300°)$$

$$L = \text{sen}120°.\cos 240°.\tan 300°$$

$$\text{sen}120° = +\text{sen}60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 300° = -\tan 60° = -\sqrt{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(-\sqrt{3}) \rightarrow \therefore L = \frac{3}{4}$$

**CONSTRUYENDO MIS CONOCIMIENTOS**

1- Encontrar el valor de:
Sen 420º . Cos 390º + Sen (-330º). Cos (-300º)

2- Calcular el valor de:

$$\frac{a^2 Sen\frac{\pi}{2} + 2abCos0° - b^2 Sen\frac{3\pi}{2}}{(a-b)^2 Cos720° - 4abCos\pi}$$

3- Calcular el valor de "n" si:
$2\sqrt{2}$ n (Cos 1125º + Sen 765º) = 1 + Tan 405º

4- Simplificar:

$$H = \frac{Ctg(2\pi-\alpha) - Tan(5\pi/2-\alpha)}{Tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) + Ctg(2\pi-\alpha)}$$

TRIGONOMETRIA

5- Si Senθ + $\sqrt{2}$ Cosθ = 0

Calcular:

M = $\dfrac{Tan(90+\theta)Sec(180°-\theta)Ctg(270°-\theta)}{Sen(\theta-360°)Csc(180°+\theta)Cos(\theta-180°)}$

6. Simplificar:

M = $\dfrac{Sen(270°+x)Tan(180°+x)}{Cos(180°-x)}$

7. Señale el equivalente de:

Sen $\left(\dfrac{55\pi}{2}-x\right)$

8. Si A y B son ángulos suplementarios a que es igual:

S = $\dfrac{Sen(2A+B)Tan(3B+2A)}{Ctg\left(\dfrac{A}{2}+\dfrac{3B}{2}\right)Cos\left(\dfrac{B}{2}+\dfrac{3A}{2}\right)}$

## REFORZANDO MIS CAPACIDADES

1- Reducir:

A = $\dfrac{Sen105°\ Tan255°\ Sec345°}{Cos165°\ Ctg195°\ Csc255°}$

a) 1 b) -1 c) $\dfrac{1}{2}$

d) -$\dfrac{1}{2}$ e) Sen x

2- Simplificar:

E = $\dfrac{(a+1)Cos540°-(a-1)Sen630°}{(b-1)Cos1260°+(b+1)Sen450°}$

a) -1 b) 1 c) 2

d) $\dfrac{1}{2}$ e) -$\dfrac{1}{2}$

3- Si Sen 40º = m a que es igual:

$\dfrac{Sen140°Cos130°Tan230°}{Ctg220°Sec410°Csc320°}$

a) $m^2$ b) $m^{-2}$ c) $-m^4$

d) $m^4$ e) $m^{-4}$

4- Reducir:

$$M = \frac{Sec(360°-a)Cos(270°-a)Tan(180°+a)}{Csc(90+a)Sen(360°-a)Ctg(270°+a)}$$

a) 0 b) -1 c) 1
d) 2 e) -2

5- Simplificar:

$$M = \frac{Tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)+Ctg(\pi-\theta)}{Ctg(2\pi-\theta)-Tan\left(\frac{5\pi}{2}-\theta\right)}$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) $\frac{1}{2}$ e) -Tan$\theta$

6- Efectuar:
M = Sen (90 - $\theta$) . Csc(270 - $\theta$)

a) 1 b) 2 c) -1
d) Sen$^2\theta$ e) Csc$^2\theta$

7- Hallar Tan 36660º

a) $\sqrt{3}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{1}{2}$ e) $-\sqrt{3}$

8- Efectuar::

Sen $\left(\frac{77\pi}{8}\right) Tan\left(\frac{55\pi}{6}\right)$

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $-\frac{1}{2}$
d) 2 e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

9- Indicar (V) o (F) en:
I. Sen (-x) = Senx
II. Cos(-x) = -Cosx
III. Sen($\pi$ - x) = Senx

a) FVF b) FFV c) VVF
d) VFV e) VFF

TRIGONOMETRIA

10- Si A + B + C = 180º
Hallar Sen (B + C)

a) –Sen A b) –Cos A c) Sen B
d) Cos C e) Sen A

11. Si $\alpha = \frac{\pi}{12}$. Hallar:

$$A = \frac{Tan\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)Cos\left(\frac{51\pi}{12} + \alpha\right)}{Tan\left(\frac{-\pi}{3}\right)Cov\left(\alpha - \frac{73\pi}{12}\right)}$$