



ACTIVIDAD DE DIVISION DE POLINOMIOS

Es aquella operación que tiene por finalidad hallar una expresión denominada "cociente", dadas otras dos denominadas "dividendo" y "divisor", tal que, el valor numérico del dividendo es igual al producto de los valores numéricos del divisor y el cociente, más el valor numérico del resto para cualquier sistema de valores atribuidos a sus letras.

$$D_{(x)} = d_{(x)} \cdot q_{(x)} + R_{(x)}$$

$$\frac{D_{(x)}}{d_{(x)}} = q_{(x)} + \frac{R_{(x)}}{d_{(x)}}$$

Donde:

- $D_{(x)}$ = Dividendo
- $d_{(x)}$ = Divisor
- $q_{(x)}$ = Cociente
- $R_{(x)}$ = Resto o residuo

CLASES DE DIVISIÓN

1. División exacta:

Es división exacta $\Rightarrow R_{(x)} = 0$

Luego

$$D_{(x)} = d_{(x)} \cdot q_{(x)}$$

2. División inexacta:

Es división inexacta $\Rightarrow R_{(x)} \neq 0$

Luego

$$D_{(x)} = d_{(x)} \cdot q_{(x)} + R_{(x)}$$

Observación: Si $R_{(x)} \neq 0$, tenemos

$D_{(x)} = d_{(x)} \cdot q_{(x)}$, luego podemos decir:

- $d_{(x)}$ es Divisor de $D_{(x)}$
- $d_{(x)}$ es factor de $D_{(x)}$

- $D_{(x)}$ es divisible por $d_{(x)}$

Ejemplo: El polinomio $d(x) = x-1$, es un factor de $D_{(x)} = 3x^2 + 2x-5$

Pues, $D_{(x)}$ es divisible por $d_{(x)}$, es decir:

$$\frac{D_{(x)}}{d_{(x)}} = \frac{3x^2 + 2x - 5}{x - 1} \Rightarrow R_{(x)} = 0$$

PROPIEDADES DE GRADO

1. El grado del cociente es igual al grado del dividendo menos el grado del divisor:

$$[q_{(x)}]^p = [D_{(x)}]^p - [d_{(x)}]^p$$

2. El grado del residuo es siempre menor que el grado del divisor, su máximo grado es una unidad menor que el grado del divisor (a excepción de los polinomios homogéneos).

$$R_{MAX} = [d_{(x)}]^p - 1$$

3. El término independiente del dividendo estará determinado por el producto de los términos independientes del divisor y el cociente más el término independiente del residuo.

$$T.I.(D) = T.I.(d) \cdot T.I.(q) + T.I.(R)$$

CASOS QUE SE PRESENTAN EN LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS

- I. División de Monomios:** Para dividir monomios, se dividen los signos (según la ley de signos) luego se dividen los coeficientes y por último las partes literales de acuerdo a la ley de expone

Ejemplos:

$$* \frac{8x^5y^5}{4xyz^2} 2xy^4z^{-2}$$

$$* \frac{-36a^mb^n}{6ab^2} = -6a^{m-1}b^{n-2}$$

- II. División de un polinomio entre un Monomio:** Para dividir un Polinomio entre un monomio se divide cada uno de los términos del polinomio separadamente entre el monomio divisor y se suman algebraicamente cada uno de éstos resultados.

Ejemplo dividir:

$$P = \frac{42x^6y^5 + 21x^3y^7 - 35x^5y^2}{7xy^2}$$

Resolución:

$$P = \frac{42x^6y^5}{7xy^2} + \frac{21x^3y^7}{7xy^2} - \frac{35x^5y^2}{7xy^2}$$

$$P = 6x^5y^3 + 3x^2y^5 - 5x^4$$

III. División de dos polinomios: La división de polinomios sólo es aplicable para:

- a) Polinomios de una sola variable
- b) Polinomios homogéneos

Se debe tener en cuenta que los polinomios deben ser completos y ordenados en forma decreciente, con respecto a una letra llamada "**ORDENATRIZ**", si faltarse alguna variable se remplazarán por **ceros**.

Para dividir dos polinomios se utilizan los siguientes métodos:

- 1. Método clásico o general
- 2. Método de los coeficientes separados
- 3. Método de los coeficientes indeterminados
- 4. Método de Horner
- 5. Método de Ruffini

ESTUDIO DE CADA UNO DE LOS MÉTODOS

1. Método clásico o general: Para dividir dos polinomios mediante éste método se debe tener en cuenta las siguientes reglas:

- a) Ordenar tanto el dividendo como el divisor según las potencias, decrecientemente con respecto a una variable.
- b) En caso de faltar una potencia de la variable se coloca en su lugar el término faltante con coeficiente cero.
- c) Dividir el primer término del dividendo por el primer término del divisor para obtener el primer término del cociente.
- d) Este término se multiplica por cada uno de los términos del divisor y se pasan a restar con los correspondientes términos del dividendo.
- e) Tratar el resto obtenido en el paso (d), como si fuera un nuevo dividendo y repetir los pasos (c) y (d).
- f) Continuar este proceso hasta que el resto obtenido sea tal que su grado resulte menor que el del divisor (o que sea cero), dando el proceso como terminado.

Ejemplo: dividir:

$$a^2+2a^4 - 3a^3 + a-2 \text{ entre } a^2-3a+2$$

Resolución:

$$\begin{array}{r|l} a^2+2a^4-3a^3+a-2 & a^2-3a+2 \\ -2a^4+6a^3-4a^2 & 2a^2+3a+6 \\ \hline & 3a^3-3a^2+a \end{array}$$

$$\frac{-3a^3 + 9a^2 - 6a}{6a^2 - 5a - 2}$$

$$6a^2 - 5a - 2$$

$$\frac{-6a^2 + 18a - 12}{13a - 14}$$

$$13a - 14$$

$$\therefore q(x) = 2a^2 + 3a + 6$$

$$R(x) = 13a - 14$$

Método de los coeficientes separados: En este caso, además de las consideraciones anteriores se debe tener en cuenta:

- g) Se trabaja solamente con los coeficientes y sus correspondientes signos del dividendo y divisor.
- h) En caso de faltar un término con una potencia de la variable se coloca en lugar cero, tanto en el dividendo como en el divisor.
- i) De esta manera se obtienen los coeficientes con sus signos del polinomio cociente.
- j) Para determinar el grado del coeficiente y resto se aplican las propiedades.

$$[q(x)]^0 = [D(x)]^0 - [d(x)]^0$$

$$[R(x)]^0 = [d(x)]^0 - 1$$

Ejemplo: dividir:

$$\frac{6a^5 - 20a^4 - 13a^3 + 25a^2 - 12a + 7}{3a^2 - a + 1}$$

$$3a^2 - a + 1$$

Resolución:

$$\begin{array}{r|l}
 6-20-13+25-12+7 & 3-1+1 \\
 \hline
 -6+2-2 & 2-6-7+8 \\
 \hline
 -18-15+25 & \\
 +18-6+6 & \\
 \hline
 -21+31-12 & \\
 +21-7+7 & \\
 \hline
 -24-5+7 & \\
 -24+8-8 & \\
 \hline
 3-1 &
 \end{array}$$

$$* [q(x)]^0 = [D(x)]^0 - [d(x)]^0$$

$$[q(x)]^0 = 5 - 2 = 3$$

$$* [R(x)]^0 = [d(x)]^0 - 1$$

$$[R(x)]^0 = 2 - 1 = 1$$

$$q(x) = 2a^3 - 6a^2 - 7a + 8$$

$$R(x) = 3a - 1$$

- 2. Método de los coeficientes indeterminados:** Este método consiste en plantear el resultado con coeficientes desconocidos, basándose en la identidad fundamental de la división algebraica.

$$D = d \cdot q + R$$

El cociente (q) y residuo (R) se asumen que son conocidos con coeficientes indeterminados para poder establecer la identidad.

Ejemplo: Dividir:

$$\underline{6x^4 - x^3 - 17x^2 - 5x - 3}$$

$$3x^3 + 4x^2 - 2x - 1$$

Resolución:

- Análisis de grados:

$$[q(x)]^0 = 4 - 3 = 1$$

$$[R_{(MAX)}]^0 = 3 - 1 = 2$$

∴ q(x) y R(x) son de la forma:

$$q(x) = ax + b \dots\dots (I)$$

$$R(x) = cx^2 + dx + e \dots\dots (II)$$

- Sabemos que: $D = d \cdot q + R$, para nuestro caso:

$$\underbrace{6x^4 - x^3 - 17x^2 + 5x - 3}_{D(x)} = \underbrace{(3x^3 + 4x^2 - 2x - 1)}_{d(x)} \underbrace{(ax + b)}_{q(x)} + \underbrace{cx^2 + dx + e}_{R(x)}$$

- Realizando operaciones en el segundo miembro y agrupando convenientemente.

$$6x^4 - x^3 - 17x^2 + 5x - 3 = 3ax^4 + (4a + 3b)x^3 + (-2a + 4b + c)x^2 + (-a - 2b + d)x + (-b + e)$$

Identificando coeficientes:

$$i) \quad 6 = 6a \Rightarrow a = 2$$

$$ii) \quad -1 = 4a + 3b \Rightarrow b = -3$$

$$iii) \quad -17 = 2a + 4b + c \Rightarrow c = -1$$

$$iv) \quad 5 = -a - 2b + d \Rightarrow d = 1$$

$$v) \quad -3 = b + e \Rightarrow e = -6$$

$$\therefore q(x) = ax + b = 2x - 3$$

$$R(x) = cx^2 + dx + e = -x^2 + x - 6$$

CONSTRUYENDO

MIS CONOCIMIENTOS

I. Por el método clásico:

1. Dividir: $x^3 + 3x^2 - 3x + 5$

Entre $x + 2$

Resolución :

Rpta. $q_{(x)} = x + 2$; $R_{(x)} = 15$

2. Dividir:

$$\frac{2x^4 + x^3 + 6x^2 + 3x + 6}{x^2 - x + 2}$$

Resolución :

Rpta. $q_{(x)} = 2x^2 + 3x + 5$; $R_{(x)} = 2x - 4$

3. Dividir:

$$\frac{3x^4 + 15x^3 + 3x - 14}{x^2 + 5x - 3}$$

Resolución:

Rpta. $q_{(x)} = 3x^2 + 9$; $R_{(x)} = -42x + 13$

II. Por el método de los coeficientes separados:

1. Dividir: $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 2$ entre $x^2 + x + 1$

Resolución:

Rpta. $q_{(x)} = x^2 + 2x$; $R_{(x)} = -x + 2$

2. Dividir:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 1}$$

Resolución :

Rpta. $q_{(x)} = x^2 + 2x + 1$; $R_{(x)} = 0$

3. Dividir: $\frac{3x^3 + 14x^2 + 17x + 11}{x + 3}$

Resolución :

Rpta. $q_{(x)} = 3x^2 + 5x + 2$; $R_{(x)} = 5$

REFORZANDO

MIS CAPACIDADES

1. Efectuar la siguiente división:

$\frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x - 1}$ y dar como respuesta el residuo:

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

2. Hallar la suma de coeficientes del cociente de la siguiente división:

$$\frac{x^4 - x^3 - 2}{x + 1}$$

- a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

3. Hallar el término independiente del residuo de la siguiente división:

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 2x + 4}{x^2 - 1}$$

- a) 0 b) 1 c) -3
d) 2 e) -2

4. Al dividir el polinomio:

$2x^4 - 8x^3 + mx^2 + 3x - 2$ entre $2x - 6$ se obtiene un cociente cuya suma de coeficientes es 3. Hallar "m"

- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

5. Hallar la suma de coeficientes del cociente de la siguiente división:

$$\frac{-4x^9 + 6x^3 - 12}{x^3 - 2}$$

- a) -20 b) -30 c) -36
d) -22 e) -48

6. Hallar la suma de coeficientes del dividendo de una división donde el divisor es $x^2 - 1$; el cociente, $x^2 + 3x + 2$ y el residuo, $x + 5$

- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) N.A.

7. Hallar el término independiente del divisor de una división donde $D(x) = x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 6$, $q(x) = x^3 - x^2 + 2$ y $R(x) = 2x + 6$

- a) -4 b) -6 c) -8
d) -10 e) -12

8. Hallar el valor de "m" para que la siguiente división:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x - m}{2x + 1}, \text{ tenga residuo cero:}$$

- a) -5 b) -4 c) -2

d) -1 e) -3

9. En una división donde el cociente es $q(x) = 3x^2 + 2x - 5$ y el resto $R(x) = 2x + 8$, hallar la suma de coeficientes del dividendo.

a) 8 b) 0 c) 2
d) 10 e) 6

10. Hallar la suma de coeficientes del resto de la siguiente división:

$$\frac{x^{10} - 6x^8 + 8x^6 - 7x^5 + 6x^3 - 3x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x}$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

AUTOEVALUACIÓN

1. Calcular la suma de coeficientes del siguiente polinomio homogéneo:

$$P_{(x,y)} = 2ax^{b^{5+2a}} - 5aby^{2^{3-2^{-1}}} + 3bx^{b^{a+7}}$$

Resolución:

2. Si $Q(x) = 3x - 2$

Hallar: $Q_{(x+3)} - Q_{(2x+1)}$

Resolución :

3. Halla $P_{(1)} + P_{(3)} + P_{(-2)}$; si

$$P_{(x)} = (x-1)(x+2) + (x+2)(x-3) + (x-3)(x-1)$$

Resolución :

4. Si: $\frac{a}{2b} + \frac{2b}{a} = 2$

$$\text{Hallar: } \left(\frac{a}{b}\right)^8$$

Resolución :

5. Si: $x^{-1} + x = 5$

Calcular el valor de: $x^{-2} + x^2$

Resolución :

6. Dividir:

ALGEBRA

$$\frac{6x^5 - 20x^4 - 13x^3 + 25x^2 - 12x + 7}{3x^2 - x + 1}$$

Resolución :